ΕΠΛ 232: Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Κατ'οίκον Εργασία 1

Ημερομηνία Παράδοσης: 24/02/04

1. Σας δίνεται ένα σύνολο S από n εργασίες, όπου η εργασία i έχει χρόνο εκτέλεσης d_i μονάδες χρόνου. Έχετε στη διάθεσή σας ένα επεξεργαστή ο οποίος ανά πάσα στιγμή είναι χρησιμοποιήσιμος από μια εργασία. Μια δρομολόγηση των εργασιών είναι μια σειρά εκτέλεσης των εργασιών από τον επεξεργαστή. Για κάποια δρομολόγηση ορίζουμε το c_i ως το χρόνο μέχρι τη συμπλήρωσης της εργασίας i σύμφωνα με τη δρομολόγηση, και το μέσο χρόνο συμπλήρωσης των εργασιών, E, ως εξής:

$$E = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i$$

Για παράδειγμα στην περίπτωση όπου n = 2, $d_1 = 3$ και $d_2 = 5$, υπάρχουν δύο δρομολογήσεις, οι $\langle 1,2 \rangle$ και $\langle 2,1 \rangle$. Κατά τη δρομολόγηση $\langle 1,2 \rangle$ έχουμε $c_1 = 3$, $c_2 = 8$ και E=11/2, ενώ, κατά τη δρομολόγηση $\langle 2,1 \rangle$, έχουμε $c_1 = 8$, $c_2 = 5$ και E = 13/2.

(α) Στόχος της άσκησης είναι η δημιουργία αλγορίθμου ο οποίος να βρίσκει και να επιστρέφει τη δρομολόγηση εργασιών με τον ελάχιστο μέσο χρόνο συμπλήρωσης. Θεωρήστε τα πιο κάτω κριτήρια "απληστίας" για τη δημιουργία άπληστου αλγορίθμου για το πρόβλημα.

(i) Επέλεξε την εργασία με το μικρότερο χρόνο εκτέλεσης.
(ii) Επέλεξε την εργασία με το μεγαλύτερο χρόνο εκτέλεσης.

Για κάθε ένα από τα πιο πάνω κριτήρια είτε να αποδείξετε πως είναι κατάλληλο για τη δημιουργία άπληστου αλγορίθμου για το πρόβλημα, είτε να δώσετε ένα απλό αντιπαράδειγμα που να δείχνει την ακαταλληλότητά του.

(β) Θεωρήστε τώρα παραλλαγή του προβλήματος όπου οι εργασίες δεν είναι διαθέσιμες από την αρχή. Αντίθετα, κάθε εργασία i έχει κάποιο χρόνο αποδέσμευσης r_i, κατά τον οποίο γίνεται έτοιμη για εκτέλεση από τον επεξεργαστή. Υποθέστε επίσης πως στο σύστημα στο οποίο τρέχουν οι εργασίες, είναι επιτρεπτή η διακοπή μιας εργασίας καθώς τυγχάνει επεξεργασίας από τον επεξεργαστή και επανεκκίνησή της σε μεταγενέστερο στάδιο. Για παράδειγμα, αν μια εργασία i έχει χρόνο εκτέλεσης $d_i = 6$ τότε μπορεί να ξεκινήσει στο χρόνο 1 και να διακοπεί στο χρόνο 4, να ξαναξεκινήσει στο χρόνο 11 και να διακοπεί το χρόνο 12 και τέλος να ξεκινήσει στο χρόνο 15 και να συμπληρωθεί στο χρόνο 17.

Να σχεδιάσετε αλγόριθμο ο οποίος να δρομολογεί τις εργασίες ελαχιστοποιώντας το συνολικό μέσο χρόνο συμπλήρωσής τους σε αυτό το νέο σενάριο. Να αποδείξετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας και να υπολογίσετε το χρόνο εκτέλεσής του.

2. Σας δίνεται μια σκακιέρα με 4 γραμμές και n στήλες, και ένα σύνολο από 2n πέτρες. Κάθε πέτρα μπορεί να τοποθετηθεί σε ακριβώς ένα τετράγωνο της σκακιέρας. Μια *νόμιμη τοποθέτηση* ορίζεται ως μια τοποθέτηση κάποιων ή όλων των πετρών στη σκακιέρα έτσι ώστε να μην υπάρχουν πέτρες τοποθετημένες σε τετράγωνα που γειτνιάζουν είτε κάθετα είτε οριζόντια (διαγώνια γειτνίαση επιτρέπεται). Σε κάθε τετράγωνο είναι γραμμένος ένας ακέραιος αριθμός. Γράφουμε gain(i,j) για τον αριθμό που είναι γραμμένος στο τετράγωνο (i,j) της σκακιέρας. Η *τιμή* μιας νόμιμης τοποθέτησης είναι το άθροισμα των ακεραίων όλων των τετραγώνων που καλύπτονται από πέτρες στην τοποθέτηση. Θέλουμε να υπολογίσουμε τη μέγιστη τιμή των κανονικών τοποθετήσεων.

   (α) Να προσδιορίσετε και να αριθμήσετε τις νόμιμες τοποθετήσεις που μπορούν να συμβούν σε μια στήλη της σκακιέρας.

   (β) Χρησιμοποιώντας την αρίθμησή σας από το μέρος (α), να ορίσετε αναδρομικά τη δομή μιας βέλτιστης λύσης. Συγκεκριμένα, να εκφράσετε αναδρομικά τη μέγιστη τιμή νόμιμης τοποθέτησης, C(i,k), από τη στήλη 1 μέχρι τη στήλη i, που τελειώνει με στήλη στην τοποθέτηση με αριθμό k. (Βεβαιωθείτε πως η απάντησή σας καλύπτει όλες τις περιπτώσεις.)

   $$C(i,k) = \begin{cases} \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

   (γ) Με βάση την πιο πάνω σχέση να σχεδιάσετε αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ο οποίος να λύνει το πρόβλημα. Ποια η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας σαν συνάρτηση του n.

   (δ) Να επεκτείνετε τον αλγόριθμο έτσι ώστε να επιστρέφεται όχι μόνο τη μέγιστη τιμή των νόμιμων τοποθετήσεων αλλά και τη μορφή μιας νόμιμης τοποθέτησης με μέγιστη τιμή.

3. Θεωρήστε τα πολυώνυμα δευτέρου βαθμού

   $$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$
   $$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

   Θέλουμε να υπολογίσουμε το γινόμενο των δύο πολυωνύμων $C(x) = A(x) \cdot B(x)$.

   (α) Πόσοι πολλαπλασιασμοί και προσθέσεις απαιτούνται για τον υπολογισμό του C(x) με την μέθοδο που ακολουθεί τον ορισμό του γινομένου των δύο πολυωνύμων;

   (β) Θεωρήστε τα πιο κάτω γινόμενα:

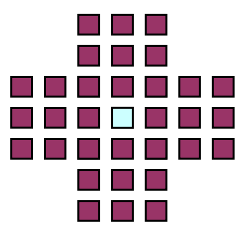
   $$P_1 = a_0 \cdot b_0$$
   $$P_2 = a_1 \cdot b_1$$
   $$P_3 = a_2 \cdot b_2$$
   $$P_4 = (a_0 + a_1) \cdot (b_0 + b_1)$$
   $$P_5 = (a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2)$$
   $$P_6 = (a_0 + a_2) \cdot (b_0 + b_2)$$

Να δείξετε μέθοδο υπολογισμού των συντελεστών του πολυωνύμου C(x) χρησιμοποιώντας μόνο τα πιο πάνω γινόμενα και κάποιες επιπρόσθετες προσθαφαιρέσεις. Ποιος είναι ο συνολικός αριθμός πολλαπλασιασμών και προσθαφαιρέσεων που απαιτούνται;

(γ) Να χρησιμοποιήσετε την πιο πάνω μέθοδο για να δώσετε αλγόριθμο τύπου διαίρει και βασίλευε για τον πολλαπλασιασμό δύο πολυωνύμων βαθμού n, με χρόνο εκτέλεσης $\Theta(n^{\log_3 6})$.

(δ) Έστω ότι γνωρίζουμε την ύπαρξη ενός αλγόριθμου Α ο οποίος πολλαπλασιάζει δύο πολυώνυμα βαθμού n με m αναδρομικούς πολλαπλασιασμούς και κάποιο σταθερό αριθμό προσθαφαιρέσεων πολυωνύμων βαθμού n/4. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του m για την οποία ο αλγόριθμος Α είναι πιο αποδοτικός από τον πιο πάνω αλγόριθμο. (Μπορεί να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα γενικής χρήσης για λύση οποιασδήποτε αναδρομικής εξίσωσης συναντηθεί).

4. Θεωρήστε το πιο κάτω επιτραπέζιο παιχνίδι. Τριάντα δύο πέτρες είναι τοποθετημένες σε μια "σκακιέρα" όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Αρχικά, μόνο η θέση στο κέντρο της σκακιέρας είναι κενή. Επιτρεπτές κινήσεις του παιχνιδιού είναι οι εξής: Μια πέτρα X μπορεί να περάσει πάνω από μια γειτονική της πέτρα Y, είτε οριζόντια είτε κάθετα, δεδομένου ότι η θέση που ακολουθεί είναι κενή. Σε τέτοια περίπτωση η πέτρα Y αφαιρείται από τη σκακιέρα. Να γράψετε αλγόριθμο που να δίνει μια σειρά κινήσεων η οποία να οδηγεί στην κατάσταση όπου παραμένει μόνο μια πέτρα στη σκακιέρα και όπου αυτή βρίσκεται τοποθετημένη στο κέντρο της σκακιέρας. Να αναλύσετε τη χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.



5. Να δώσετε αλγορίθμους οι οποίοι με δεδομένο εισόδου κάποιο γράφο να υπολογίζουν τα πιο κάτω:
   (i) Τον μέγιστο αριθμό μονοπατιών ανάμεσα σε κάθε ζεύγος κορυφών.
   (ii) Τον αριθμό βραχύτερων μονοπατιών ανάμεσα σε κάθε ζεύγος κορυφών.