ΕΠΛ 232: Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Κατ'οίκον Εργασία 3

Ημερομηνία Παράδοσης: 07/05/04

1. Δίκτυα Ταξινόμησης:
   (α) Να αποδείξετε πως σε οποιοδήποτε δίκτυο ταξινόμησης με n γραμμές εισόδου πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένας συγκριτής ανάμεσα στις εισόδους i και $i + 1$, για κάθε $1 \leq i \leq n$.
   (β) Σας δίνονται $2n$ ακέραιοι, $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, και θέλετε να ξεχωρίσετε τους n μικρότερους από τους n μεγαλύτερους (όχι κατ'ανάγκη σε ταξινομημένη σειρά). Να δείξετε πως αφού ταξινομηθούν οι n πρώτοι ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) και οι n τελευταίοι αριθμοί ($a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n}$) ο διαχωρισμός αυτός μπορεί να επιτευχθεί μέσω ενός δικτύου σύγκρισης βάθους 1.

2. Σας δίνεται μια λίστα με n στοιχεία η οποία περιέχει $n/2$ επαναλήψεις ενός ακεραίου και $n/2$ άλλους ακεραίους, διαφορετικούς μεταξύ τους. Να δώσετε τυχαιοποιημένο αλγόριθμο τύπου Las Vegas ο οποίος να εντοπίζει το στοιχείο που επαναλαμβάνεται $n/2$ φορές. Ο αλγόριθμος σας θα πρέπει να τερματίζει σε χρόνο $c \cdot \alpha \cdot \log n$ με πιθανότητα $1 - \frac{1}{n^{\alpha}}$ για κάποια σταθερά c.

3. Έστω n καταχωρητές $M_1, \ldots, M_n$. Στόχος της άσκησης αυτής είναι ο σχεδιασμός παράλληλων αλγορίθμων για το μοντέλο PRAM EREW οι οποίοι να αντιγράφουν την τιμή του καταχωρητή M_1 σε κάθε ένα από τους καταχωρητές $M_2, \ldots, M_n$.
   (α) Να προτείνετε κατάλληλο αλγόριθμο ο οποίος να λύνει το πρόβλημα σε χρόνο $O(\log n)$ χρησιμοποιώντας n επεξεργαστές.
   (β) Να προτείνετε κατάλληλο αλγόριθμο ο οποίος να λύνει το πρόβλημα σε χρόνο $O(\log n)$ χρησιμοποιώντας $n/\log n$ επεξεργαστές.

4. Να προτείνετε αλγόριθμο για το μοντέλο CREW ο οποίος να πολλαπλασιάζει δύο πίνακες διαστάσεων $n \times n$ σε χρόνο $O(\log n)$ χρησιμοποιώντας $n^{\lg 7}$ επεξεργαστές.

5. Σας δίνεται μια ακολουθία, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, η οποία είναι αρχικά μονοτονικά αύξουσα και στη συνέχεια μονοτονικά φθίνουσα. Θεωρήστε τη θέση M για την οποία $a_i < a_{i+1}$, $1 \leq i < M$, και $a_i > a_{i+1}$, $M \leq i < n$. Να προτείνετε αλγόριθμο ο οποίος να εντοπίζει τη θέση M του πίνακα σε χρόνο $O(\log n)$.