ΕΠΛ 232: Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Κατ’οίκον Εργασία 2Β – Σκελετοί Λύσεων

1. Έστω πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. Ο απλός αλγόριθμος για υπολογισμό της ζητούμενης τιμής βασίζεται στον κανόνα του Horner σύμφωνα με τον οποίο:

$$f(u + iv) = a_0 + (u+iv)[a_1 + (u+iv)[a_2 + (u+iv)[\ldots [a_{n-1}+ (u+iv)a_n]...]]]$$

   Ο αλγόριθμος που προκύπτει έχει ως εξής:

```
re = a_n;
im = 0;
if (n > 1)
   re = re + a_{n-1}·u;
   im = a_{n-1}·v;
for (i = n-2; i >= 0; i--)
   re = a_i + re·u – im·v;
   im = re·v + im·u;
return (re + im·i)
```

   Ο αλγόριθμος αυτός εκτελεί n–1 επαναλήψεις, κάθε μια από τις οποίες στοιχίζει 4 πολλαπλασιασμούς και 3 προσθαφαιρέσεις και επιπλέον 1 πολλαπλασιασμό και 1 πρόσθεση. Επομένως, συνολικά εκτελούνται 4n–3 πολλαπλασιασμοί και 3n–2 προσθέσεις.

   Ο ζητούμενος αλγόριθμος βασίζεται στη διαίρεση του πολυωνύμου f(x) με τον όρο

$$(x – z)(x – z’)$$

   όπου $z = u+i\cdot v$, $z’ = u - i\cdot v$ και z είναι το σημείο στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το πολυώνυμο. Τότε το πηλίκο της διαίρεσης είναι ένα πολυώνυμο βαθμού (n – 2) και το υπόλοιπο ένα πολυώνυμο βαθμού 1:

$$f(x) = b_0 + b_1x + (x - z)(x - z')(b_2 + b_3x + ... + b_nx^{n-2}) \quad (\blacklozenge)$$

   Αν μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τους συντελεστές $b_0, \ldots, b_n$, τότε η τιμή f(z) υπολογίζεται απλά ως $f(z) = b_0 + b_1z$

   Για να το πετύχουμε αυτό παρατηρούμε πως

$$(x – z)(x – z’) = x^2 – 2ux + u^2 + v^2$$

   Επομένως από την (♦):

$$\begin{aligned} f(x) = b_0 &+ (u^2 + v^2)b_2 \\ &+ [b_1 - 2ub_2 + (u^2 + v^2)b_3]x \\ &+ \ldots \\ &+ [b_k - 2ub_{k+1} + (u^2 + v^2)b_{k+2}]x^k \\ &+ \ldots \\ &+ [b_{n-1} - 2ub_n]x^{n-1} \\ &+ b_nx^n \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις δύο εναλλακτικές μορφές του πολυωνύμου παίρνουμε:

$$a_0 = b_0 + (u^2 + v^2)b_2$$
$$a_k = b_k - 2ub_{k+1} + (u^2 + v^2)b_{k+2} \qquad 1 \le k \le n-2$$
$$a_{n-1} = b_{n-1} - 2ub_n$$
$$a_n = b_n$$

Η μέθοδος αυτή εισηγείται τον πιο κάτω αλγόριθμο για υπολογισμό του f(z)

Υπολόγισε το 2u (1 πρόσθεση, 0 πολλαπλασιασμοί)

Υπολόγισε το $u^2 + v^2$ (1 πρόσθεση, 2 πολλαπλασιασμοί)

Υπολόγισε το $b_n = a_n$ (0 προσθέσεις, 0 πολλαπλασιασμοί)

Υπολόγισε το $b_{n-1} = a_{n-1} + 2ub_n$ (1 πρόσθεση, 1 πολλαπλασιασμός)

Υπολόγισε τα $b_k = a_k + 2ub_{k+1} – (u^2 + v^2)b_{k+2}$
για $n – 2 \ge k \ge 1$
(2(n–2) προσθέσεις, 2(n – 2) πολλαπλασιασμοί)

Υπολόγισε το $b_0= a_0 + (u^2 + v^2)b_2$ (1 πρόσθεση, 1 πολλαπλασιασμός)

Υπολόγισε και επέστρεψε την τιμή
$(b_0 + b_1u) + i\cdot b_1v$ (1 πρόσθεση, 2 πολλαπλασιασμοί)

Συνολικά αυτό δίνει (2n + 1) προσθέσεις και (2n + 2) πολλαπλασιασμούς.

2. (α) Η τομή δύο τραπεζίων, αν υπάρχει, είναι πολύγωνο με το πολύ 8 κορυφές. Οι κορυφές αυτές είτε αποτελούν σημεία τομής δύο ευθύγραμμων τμημάτων των δύο τραπεζίων είτε κορυφές ενός από τα τραπέζια οι οποίες βρίσκονται εντός του άλλου τραπεζίου. Επομένως ο αλγόριθμος έχει ως εξής:
   - Υπολόγισε όλες τις τομές των ευθυγράμμων τμημάτων των δύο τραπεζίων. (Χρήση του αλγόρίθμου ελέγχου αν δύο ευθύγραμμα τμήματα τέμνονται και εύρεση του σημείου τομής αν υπάρχει).
   - Για κάθε σημείο του ενός τραπεζίου αποφάσισε αν βρίσκεται εντός του άλλου. (Ο αλγόριθμος αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.)

   Χρόνος εκτέλεσης: O(1)

   (β) Θεωρούμε τις κατακόρυφες ευθείες που διέρχονται από τις κορυφές των δύο κυρτών πολυγώνων. Οι γραμμές αυτές χωρίζουν το επίπεδο σε κατακόρυφες λωρίδες. Η τομή κάθε τέτοιας λωρίδας με κάθε ένα από τα πολύγωνα είναι ένα τραπέζιο, έτσι η τομή κάθε τέτοιας λωρίδας και με τα δύο πολύγωνα είναι η τομή δύο τραπεζίων και μπορεί να υπολογιστεί και μπορεί να βρεθεί με τον αλγόριθμο από το μέρος (α). Στη συνέχεια οι προκύπτουσες τομές τραπεζίων μπορούν να ενωθούν μέσω μιας σάρωσης. Αφού το σύνολο των σημείων των δύο πολυγώνων είναι n+m, υπάρχουν n+m κατακόρυφες λωρίδες και ισάριθμες τομές.
   Χρόνος εκτέλεσης: O(n+m)