

ΕΠΑ 232 - Φροντιστήριο 1

Πρόβλημα 1 : Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Έστω

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$$

Στόχος: υπολογισμός του γινομένου (δηλαδή των τιμών r , s , t , και u)

Επισυνάπτονται τρεις τρόποι επίτευξης του στόχου. Να συζητήσετε την ορθότητα και την αποδοτικότητά τους.

Να τους χρησιμοποιήσετε για τη δημιουργία διαίρει και βασίλευε αλγορίθμων για πολλαπλασιασμό πινάκων. Ποιος ο χρόνος εκτέλεσης των αλγορίθμων σας;



Πρόβλημα 2: Πολλαπλασιασμός ακεραίων

Θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε δύο n -αψήφιους αριθμούς α και β . Ο γνωστός τρόπος έχει χρόνο εκτέλεσης $O(n^2)$. Μπορούμε να το βελτιώσουμε;

Υποθέτουμε απλοποιητικά ότι ο n είναι δύναμη του 2. Τότε οι α και β μπορούν να γραφούν ως

$$\alpha = x \cdot 10^{n/2} + y$$

$$\beta = w \cdot 10^{n/2} + z$$

όπου οι x , y , w και z έχουν ο καθένας $n/2$ ψηφία.

Συνεπώς το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ δίνεται ως το άθροισμα

$$\alpha \cdot \beta = xw \cdot 10^n + (xz + wy) \cdot 10^{n/2} + yz$$

το οποίο απαιτεί 4 πολλαπλασιασμούς $(n/2)$ -αψήφιων ακεραίων. Χρήση αυτής της μεθόδου μας δίνει αλγόριθμο πολυπλοκότητας $\Theta(n^2)$.

Είναι δυνατό να υπολογίσουμε το γινόμενο με μόνο 3 πολλαπλασιασμούς ακεραίων μισού μεγέθους;



Παρατηρούμε ότι υπολογίζοντας τις τιμές των xw , $(x+y)(w+z)$, yz (3 πολλαπλασιασμοί) η τιμή του $xz+wy$ προκύπτει ως

$$xz+wy=(x+y)(w+z) - xw - yz$$

Η διαδικασία `multiply` δέχεται σαν δεδομένα εισόδου δύο ακεραίους αριθμούς και ένα επιπλέον ακέραιο ο οποίος αντιστοιχεί στον αριθμό των ψηφίων τους και επιστρέφει το γινόμενο τους.

```
multiply(a, b, n)
  if (n==1) return a·b;
  else
    x = a div 10n/2;
    y = a mod 10n/2;
    w = b div 10n/2;
    z = b mod 10n/2;

    p = multiply(x, w, n/2);
    q = multiply(y, z, n/2);
    r=multiply(x+y, w+z, n/2);

    return p·10n + (r-p-q)·10n/2 + q;
```



Έστω $T(n)$ ο χρόνος εκτέλεσης της $\text{multiply}(a,b,n)$.
Τότε

$$T(n) = 3 \cdot T(n/2) + O(n)$$

όπου $O(n)$ είναι ο χρόνος που απαιτείται για την εκτέλεση των div , mod , και των υπόλοιπων προσθέσεων, αφαιρέσεων, διαιρέσεων και πολλαπλασιασμών. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα γενικής χρήσης, παίρνουμε ότι

$$\Theta(n^{\lg 3})$$

