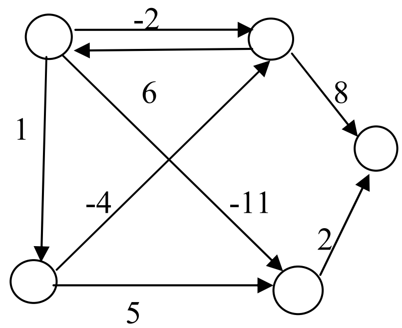
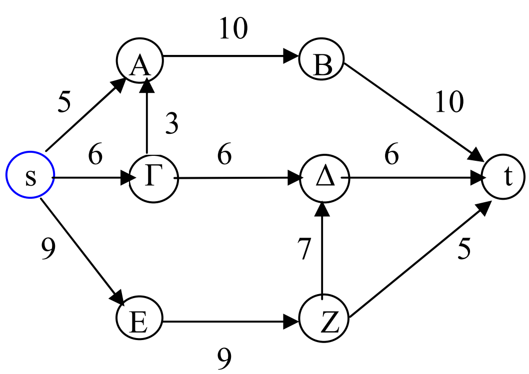
Φροντιστήρια 5-6

1. *<u>Ο αλγόριθμος Floyd Warshall για εύρεση βραχύτατων μονοπατιών για όλα τα ζεύγη</u>*
   (i) Να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο στον πιο κάτω γράφο, δείχνοντας όλα τα ενδιάμεσα στάδια.



   (ii) Να επεκτείνετε τον αλγόριθμο έτσι ώστε να αποφασίζει την ύπαρξη κύκλων αρνητικού κόστους σε κάποιο γράφο.
   (iii) Να δώσετε αλγόριθμο ο οποίος βρίσκει το μήκος του κύκλου με αρνητικό κόστος που αποτελείται από τον ελάχιστο αριθμό ακμών σε κάποιο γράφο.

2. (α) Να δειχθούν όλα τα στάδια της εκτέλεσης του αλγορίθμου Edmond Karps για εύρεση της μέγιστης ροής στο πιο κάτω δίκτυο ροής.



   (β) Στο τμήμα Πληροφορικής υπάρχουν n καθηγητές $K_1, K_2, ..., K_n$, και διδάσκονται n μαθήματα $M_1, M_2, ..., M_n$. Κάθε καθηγητής μπορεί να επιλέξει δύο μαθήματα τα οποία θα επιθυμούσε να διδάξει. (Κάθε καθηγητής θα διδάξει ένα μάθημα και κάθε μάθημα θα διδάσκεται από ένα καθηγητή.) Να εισηγηθείτε αλγόριθμο ο οποίος να αποφασίζει κατά πόσο υπάρχει αντιστοίχηση κάθε μαθήματος με κάποιο καθηγητή έτσι ώστε κάθε καθηγητής να διδάσκει ένα από τα μαθήματα που έχει δηλώσει ως μια από τις προτιμήσεις του και, αν μια τέτοια αντιστοίχηση υπάρχει, να την επιστρέφει.

Να αποδείξετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας.

(Ενδιάμεση Εξέταση 2002)

3. (α) Έστω πολυώνυμο f βαθμού n. Τι είναι ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier του f, DFT_n(f); Ποια είναι η βασική ιδιότητα των μιγαδικών ριζών της μονάδας που μας επιτρέπει να υπολογίζουμε τον DFT_n(f) σε χρόνο O(n lg n) και πως χρησιμοποιείται από τον αλγόριθμο εύρεσης του DFT_n(f);

   (β) Δίνονται τα πολυώνυμα
   $f = \langle 0,4,0,-3 \rangle$
   $g = \langle 3, 0,-1, 0, 2 \rangle$
   σε παράσταση με συντελεστές. Να υπολογίσετε το γινόμενο των δύο πολυωνύμων f·g, χρησιμοποιώντας ταχύ μετασχηματισμό Fourier, δείχνοντας **όλα** τα στάδια της εργασίας σας. Το τελικό πολυώνυμο μπορεί να δοθεί σε παράσταση με τιμές σε σημεία.

(Ενδιάμεση Εξέταση 2002)

4. (α) Σας δίδεται ένα δίκτυο ροής αρκετές ακμές του οποίου έχουν απεριόριστη χωρητικότητα. Να δώσετε αλγόριθμο ο οποίος αποφασίζει την ελάχιστη χωρητικότητα που μπορούν να έχουν οι ακμές αυτές χωρίς να επηρεάζεται η μέγιστη ροή του δικτύου.

   (β) Ποιες από τις πιο κάτω προτάσεις είναι αληθείς; Να δώσετε απόδειξη για όλες τις αληθείς προτάσεις διαφορετικά κάποιο αντιπαράδειγμα.
   - (i) Έστω δίκτυο ροής G = (V,E). Για κάθε μέγιστη ροή f του G ισχύει ότι για κάθε ζεύγος (u,v), $u,v \in V$, είτε f(u,v)=0, είτε f(v,u)=0.
   - (ii) Έστω δίκτυο ροής G = (V,E). Υπάρχει μέγιστη ροή f του G τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος (u,v), $u,v \in V$, είτε f(u,v)=0, είτε f(v,u)=0.
   - (iii) Έστω δίκτυο ροής G = (V,E). Αν όλες οι ακμές του G έχουν διαφορετικές μεταξύ του χωρητικότητες, και (S,T) είναι η τομή με την ελάχιστη χωρητικότητα κατά μήκος τομής του δικτύου, τότε για κάθε τομή του δικτύου (S’,T’), με $S \neq S’$ και $T \neq T’$, c(S,T)< c(S’,T’). Δηλαδή η τομή (S,T) είναι η μοναδική τομή με την ελάχιστη χωρητικότητα κατά μήκος τομής.
   - (iv) Έστω δίκτυο ροής G = (V,E) και (S,T) η τομή με την ελάχιστη χωρητικότητα κατά μήκος τομής του δικτύου. Αν προσθέσουμε ποσότητα $b \in N$ στη χωρητικότητα κάθε ακμής $e \in E$ του δικτύου, τότε η (S,T) θα παραμείνει ελάχιστη τομή στο νέο δίκτυο.