



Φροντιστήριο 7

Άσκηση 1

Μια ομάδα από n κυνηγούς-ghostbusters μάχεται n φαντάσματα. Κάθε κυνηγός είναι οπλισμένος με πιστόλι, το οποίο πυροβολεί ακτίνες πρωτονίων σε ευθεία γραμμή και κτυπώντας κάποιο φάντασμα το εξαλείφει. Οι κυνηγοί έχουν επιλέξει την εξής στρατηγική: κάθε κυνηγός να διαλέξει ένα από τα φαντάσματα και ταυτόχρονα όλοι οι κυνηγοί να πυροβολήσουν το φάντασμα που τους αντιστοιχεί.

Αυστηρή προδιαγραφή: για θέματα ασφάλειας, οι ακτίνες πρωτονίων που θα ριχθούν δεν πρέπει να διασταυρωθούν.

Έστω ότι οι κυνηγοί και τα φαντάσματα μας δίνονται ως σημεία τέτοια ώστε καμιά τριάδα σημείων δεν βρίσκεται στην ίδια γραμμή. Θέλουμε να βρούμε ένα ζευγάρι κυνηγών-φαντασμάτων που να ικανοποιεί τις προδιαγραφές του προβλήματος.

- (α) Να δείξετε ότι υπάρχει γραμμή που περνά από ένα κυνηγό και ένα φάντασμα τέτοια ώστε σε κάθε πλευρά της γραμμής ο αριθμός των κυνηγών να ισούται τον αριθμό των φαντασμάτων. Να σχεδιάσετε αλγόριθμο ο οποίος να βρίσκει μια τέτοια γραμμή σε χρόνο $O(n \lg n)$.
- (β) Να σχεδιάσετε αλγόριθμο ο οποίος να βρίσκει ένα ζευγάρι κυνηγών-φαντασμάτων το οποίο να ικανοποιεί τις προδιαγραφές σε χρόνο $O(n \lg^2 n)$.

Άσκηση 2

- (α) Σας δίνονται (i) τα σημεία ενός κυρτού πολυγώνου P_1, \dots, P_n σε φορά αντίθετη με αυτή των δεικτών του ρολογιού όπου το P_1 είναι το χαμηλότερο σημείο, και (ii) κάποιο σημείο P . Να δώσετε αλγόριθμο ο οποίος να αποφασίζει αν το P βρίσκεται μέσα στο πολύγωνο. Ο αλγόριθμος σας θα πρέπει να είναι χρονικής πολυπλοκότητας $O(n)$. Να προτείνετε βελτιωμένο αλγόριθμο για το ίδιο πρόβλημα ο οποίος να έχει χρόνο εκτέλεσης $O(\lg n)$.
- (β) Έστω ότι το σημείο P δεν βρίσκεται μέσα στο πολύγωνο. Να δώσετε αλγόριθμο ο οποίος να υπολογίζει και να επιστρέφει το κυρτό περίβλημα των σημείων P, P_1, \dots, P_n και να προσδιορίσετε την πολυπλοκότητά του.
- (γ) Να γενικεύσετε τον αλγόριθμό σας από το μέρος (β) έτσι ώστε να φτιάξετε αλγόριθμο οποίος να λαμβάνει διαδοχικά n σημεία και με τη λήψη του i -οστού σημείου να υπολογίζει το κυρτό περίβλημα των i πρώτων σημείων, για κάθε $3 \leq i \leq n$. Ποιος ο χρόνος εκτέλεσης του αλγόριθμού σας;