Φροντιστήριο 3

Η *Λογική Δένδρου Υπολογισμού* (CTL) ορίζεται ως το μικρότερο σύνολο ιδιοτήτων που παράγονται ως εξής:

$$\Phi \;::=\; p \;\mid\; \neg\,\Phi \;\mid\; \Phi \vee \Psi \;\mid\; \mathbf{E}\,\varphi \;\mid\; \mathbf{A}\,\varphi$$
$$\varphi \;::=\; \mathbf{X}\,\Phi \;\mid\; \Phi\,\mathbf{U}\,\Psi$$

Σημασιολογία της CTL

Έστω δομή M κατάσταση s και ιδιότητα Φ. Ορίζουμε τις σχέσεις $\models$ και $|\equiv$ όπου

M, s $\models \Phi$ αν και μόνο αν η ιδιότητα Φ ικανοποιείται στην κατάσταση s της δομής M

M, w $|\equiv \phi$ αν και μόνο αν η ιδιότητα φ ικανοποιείται στην εκτέλεση w της δομής M

ως εξής:

M, s $\models$ p	αν και μόνο αν	p $\in$Label(s)
M, s $\models \neg\Phi$	αν και μόνο αν	δεν ισχύει ότι M, s $\models$ Φ
M, s $\models \Phi\vee\Psi$	αν και μόνο αν	M, s $\models$ Φ ή M, s $\models$ Ψ
M, s $\models$ **E** φ	αν και μόνο αν	M,w $\mid\equiv$ φ για κάποιο μονοπάτι w που ξεκινά από την s
M, s $\models$ **A** φ	αν και μόνο αν	M,w $\mid\equiv$ φ για κάθε μονοπάτι w που ξεκινά από την s
M, w $\mid\equiv$ **X** Φ	αν και μόνο αν	M, w[1] $\models$ Φ
M, w $\mid\equiv$ Φ **U** Ψ	αν και μόνο αν	υπάρχει $j\geq 0$ τέτοιο ώστε M, w[j] $\models$ Ψ και για κάθε $0 \leq k < j$, M, w[k] $\models$ Φ

όπου αν $w = s_0\, s_1\, s_2 \ldots$, $w[i] = s_i$.

Αλγόριθμος μοντελοελέγχου της CTL

Για να διαπιστώσουμε κατά πόσο η κατάσταση *s* ικανοποιεί την ιδιότητα *F*:

- Χρησιμοποίησε τις πιο κάτω ισοδυναμίες, όπως χρειάζεται, έτσι ώστε η πρόταση να περιέχει μόνο τους τελεστές EX, EU, AF.
  - $AX\ \Phi = \neg\ EX\ \neg\Phi$
  - $A(\Phi_1 U \Phi_2) = \neg\ (E[\neg\Phi_2 U(\neg\Phi_1 \wedge \neg\ \Phi_2)] \vee\ EG\ \neg\Phi_2)$
  - $EF\ \Phi = E(T\ U\ \Phi)$
  - $EG\ \Phi = \neg AF\ \neg\ \Phi$
  - $AG\ \Phi_1 = \neg EF\ \neg\Phi_1$
- Κτίσε το δένδρο που αντιστοιχεί στην ιδιότητα.
- Υπολόγισε το σύνολο *Sat*(p) για τις ιδιότητες που βρίσκονται στα φύλλα του δένδρου της ιδιότητας.
- Συνέχισε με τις υπο-ιδιότητες που βρίσκονται σε ύψος 1 στο δένδρο της ιδιότητας, στις υπο-ιδιότητες που βρίσκονται σε ύψος 2, και ούτω καθεξής μέχρι να φτάσεις στη ρίζα του δένδρου.
- Επέστρεψε τη λογική τιμή που εκφράζει κατά πόσο η *s* ανήκει στο σύνολο *Sat*(*F*)

Άσκηση 1

Θεωρήστε τον ανελκυστήρα της Άσκησης 1, Φροντιστήριο 2. Να εκφράσετε τις πιο κάτω ιδιότητες στη CTL.

i. Οι πόρτες του ανελκυστήρα δεν είναι ανοικτές όταν ο ανελκυστήρας κινείται.
ii. Είναι δυνατόν ο ανελκυστήρας να μην μεταβεί ποτέ στον όροφο 1.
iii. Όλα τα αιτήματα του ανελκυστήρα κάποτε ικανοποιούνται.
iv. Αν ο ανελκυστήρας κληθεί από τον τελευταίο όροφο τότε θα μετακινηθεί αμέσως προς αυτόν χωρίς να κάνει καμιά στάση καθ' οδόν.

at_i	Ο ανελκυστήρας βρίσκεται στον *i*-οστό όροφο
go_up	Ο ανελκυστήρας ανεβαίνει
go_down	Ο ανελκυστήρας κατεβαίνει
stop	Ο ανελκυστήρας είναι στάσιμος
open	Η πόρτα του ανελκυστήρα είναι ανοικτή
$press\_up_i$	Κάποιος έχει πατήσει το κουμπί *up* στον *i*-οστό όροφο
$press\_down_i$	Κάποιος πατά το κουμπί *down* στον *i*-οστό όροφο
$press_i$	Κάποιος πατά το κουμπί *του i*-οστού ορόφου μέσα στον ανελκυστήρα

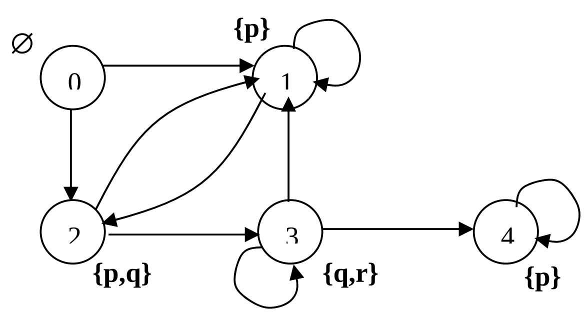
Άσκηση 2

Να ελέγξετε ποιες από τις πιο κάτω ιδιότητες αποτελούν ταυτολογίες, δίνοντας είτε απόδειξη της συνεπαγωγής είτε κάποιο αντιπαράδειγμα.

i. $\mathbf{EG}\, p \rightarrow \mathbf{AG}\, p$
ii. $\mathbf{AF}\, p \vee \mathbf{AF}\, q \rightarrow \mathbf{AF}\, (p \vee q)$
iii. $\mathbf{AF}\, (p \vee q) \rightarrow \mathbf{AF}\, p \vee \mathbf{AF}\, q$
iv. $\mathbf{AF}\, p \wedge \mathbf{AF}\, q \rightarrow \mathbf{AF}\, (p \wedge q)$

Άσκηση 3

Θεωρήστε την πιο κάτω δομή Kripke.



Να αποφασίσετε ποιες καταστάσεις της δομής ικανοποιούν τις πιο κάτω ιδιότητες χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο μοντελο-ελέγχου της CTL.

i. $\mathbf{E}(r\, \mathbf{U}\, q) \wedge \mathbf{AF}\, q$
ii. $\mathbf{EF}\, \mathbf{E}(p\, \mathbf{U}\, \mathbf{AG}\, (q \rightarrow r))$