Λύσεις 1ης Σειράς Ασκήσεων

1. **(20 μονάδες)** Κατασκευάστε ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο (ΝΠΑ) για το σύνολο των λέξεων πάνω στο αλφάβητο $\{0, 1\}$ που δεν περιέχουν καμία από τις λέξεις 00 και 11 ως υπολέξη.

   Η λύση θα δοθεί στον πίνακα.

2. **(20 μονάδες)** Θεωρείστε το μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο (ΜΝΠΑ) του σχήματος:

   Χρησιμοποιείστε την κατασκευή υποσυνόλων για να μετατρέψετε το ΜΝΠΑ σε ένα ισοδύναμο ΝΠΑ.

   Η λύση θα δοθεί στον πίνακα.

3. **(25 μονάδες)** Θεωρούμε γλώσσα L πάνω στο αλφάβητο $\{0, 1\}$. Ορίζουμε τη γλώσσα

$$\text{Διπλή}(L) \quad = \quad \{u \in \{0,1\}^* \mid \text{υπάρχει λέξη } w \in \{0,1\}^* \text{ με } |u| = |w| \text{ και } uw \in L\} \ .$$

   Αποδείξτε ότι αν η L είναι γλώσσα ΝΠΑ, τότε και η Διπλή(L) είναι γλώσσα ΝΠΑ.

   Θεωρούμε ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο (ΝΠΑ) $\mathbf{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ τέτοιο ώστε $L = \mathsf{L}(\mathbf{M})$. Υποθέτουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $\Sigma = \{0, 1\}$. Κατασκευάζουμε ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο $\mathbf{M}' = (Q', \Sigma', \delta', q'_0, F')$ (για το οποίο θα δείξουμε ότι $\mathsf{L}(\mathbf{M}') = L_2$) ως εξής:

   - $Q' = Q \times 2^Q$
   - $\Sigma' = \Sigma$
   - Για κάθε κατάσταση $(q, P) \in Q'(= Q \times 2^Q)$ και σύμβολο $\sigma \in \Sigma$,

$$\delta'((q,P),\sigma) \quad = \quad (\delta(q,\sigma), \{p \in Q \mid \delta(p,\sigma) \in P \text{ για κάποιο σύμβολο } \sigma' \in \Sigma\}) \ .$$

   - $q'_0 = (q_0, F)$
   - $F' = \{(q, P) \in Q \times 2^Q \mid q \in P\}$

Έχουμε να δείξουμε ότι $\mathsf{L}(\mathbf{M}') = L_2$. Ορίζουμε πρώτα μια βοηθητική ποσότητα, η οποία θα διευκολύνει την διατύπωση των περεταίρω συλλογισμών μας. Για αυθαίρετο σύνολο καταστάσεων $P \subseteq Q$, και γι αυθαίρετο ακέραιο $n \geq 0$, ορίζουμε το σύνολο

$$P^{(n)} = \{p \in Q \mid \text{ υπάρχει λέξη } w \in \Sigma^* \text{ με } |w| = n \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(p, w) \in P\}.$$

Διαισθητικά, το σύνολο $P^{(n)}$ είναι το σύνολο των καταστάσεων που προκύπτουν αν ξεκινήσουμε από μια κατάσταση του P και "οπισθοχωρήσουμε" κατά n βήματα. Δηλαδή, το σύνολο $P^{(n)}$ είναι το σύνολο των καταστάσεων από τις οποίες είναι προσιτή μια κατάσταση από το σύνολο P σε n βήματα. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
P^{(0)} &= \left\{p \in Q \mid \text{ υπάρχει λέξη } w \in \Sigma^* \text{ με } |w| = 0 \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(p, w) \in P\right\} \\
&= \{p \in Q \mid \widehat{\delta}(p, \epsilon) \in P\} \\
&= \{p \in Q \mid p \in P\} \\
&= P,
\end{aligned}$$

και για κάθε ακέραιο $m \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& (P^{(n)})^{(m)} \\
= \ & \{p \in Q \mid \text{ υπάρχει λέξη } w \in \Sigma^* \text{ με } |w| = m \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(p, w) \in P^{(n)} \ \} \\
= \ & \left\{p \in Q \mid \begin{array}{l} \text{υπάρχει λέξη } w \in \Sigma^* \text{ με } |w| = m \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(p, w) \in \\ \{q \in Q \mid \text{ υπάρχει λέξη } u \in \Sigma^* \text{ με } |u| = n \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(q, u) \in P \ \} \end{array} \right\} \\
= \ & \left\{p \in Q \mid \begin{array}{l} \text{υπάρχει λέξη } w \in \Sigma^* \text{ με } |w| = m \text{ τέτοια ώστε υπάρχει λέξη } u \in \Sigma^* \\ \text{με } |u| = n \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(p, w), u) \in P \end{array} \right\} \\
= \ & \left\{p \in Q \mid \begin{array}{l} \text{υπάρχουν λέξεις } w, u \in \Sigma^* \text{ με } |w| = m \text{ και } |u| = n \text{ τέτοιες ώστε} \\ \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(p, w), u) \in P \end{array} \right\} \\
= \ & \left\{p \in Q \mid \text{ υπάρχει λέξη } v \in \Sigma^* \text{ με } |v| = m + n \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(p, w), u) \in P \ \right\} \\
= \ & P^{(m+n)}.
\end{aligned}$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να δείξουμε μια βοηθητική πρόταση.

Πρόταση 1. *Για κάθε λέξη $w \in \Sigma^*$, και για κάθε κατάσταση $p \in Q$ και σύνολο καταστάσεων $P \subseteq Q$,*

$$\widehat{\delta}'((p, P), w) = (\widehat{\delta}(p, w), P^{(n)}).$$

Απόδειξη. Με επαγωγή πάνω στο $|w|$.

<u>*Βάση:*</u> Για $|w| = 0$, $w = \epsilon$. Τότε,

$$\begin{aligned}
& \widehat{\delta}'((p, P), \epsilon) \\
= \ & (p, P) && (\text{από την βάση στον επαγωγικό ορισμό της } \widehat{\delta}') \\
= \ & (\widehat{\delta}(p, \epsilon), P) && (\text{από την βάση στον επαγωγικό ορισμό της } \widehat{\delta}) \\
= \ & (\widehat{\delta}(p, \epsilon), P^{(0)}).
\end{aligned}$$

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι για κάθε λέξη w με $|w| \leq \kappa$,

$$\widehat{\delta}'((p,P),w) \;\; = \;\; (\widehat{\delta}(p,w), P^{(n)})\,.$$

Επαγωγικό βήμα: Θεωρούμε τη λέξη $w = u\sigma$ όπου $u \in \Sigma^{\kappa}$ και $\sigma \in \Sigma$. Τότε,

$$\begin{array}{lll}
 & \widehat{\delta}'((p,P),u\sigma) & \\
= & \delta'(\widehat{\delta}'((p,P),u),\sigma) & (\text{από επαγωγικό βήμα στον ορισμό της } \widehat{\delta}') \\
= & \delta'((\widehat{\delta}(p,u),P^{(\kappa)}),\sigma) & (\text{από επαγωγική υπόθεση}) \\
= & (\delta(\widehat{\delta}(p,u),\sigma),(P^{(\kappa)})^{(1)}) & (\text{από τον ορισμό της } \delta') \\
= & (\widehat{\delta}(p,u\sigma),(P^{(\kappa)})^{(1)}) & (\text{από επαγωγικό βήμα στον ορισμό της } \widehat{\delta}) \\
= & (\widehat{\delta}(p,u\sigma),P^{(\kappa+1)})\,, &
\end{array}$$

όπως χρειάζεται. □

Χρησιμοποιώντας την κατασκευή των F' και q_0', την Πρόταση 1 και τον ορισμό του συνόλου $F^{(n)}$, έχουμε ότι

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{L}(\mathbf{M}') & = & \left\{w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}'(q_0',w) \in F'\right\} \\
& = & \left\{w \mid \widehat{\delta}'(q_0',w) \in \left\{(q,P) \in Q \times 2^Q \mid q \in P\right\}\right\} \\
& = & \left\{w \mid \widehat{\delta}'((q_0,F),w) \in \left\{(q,P) \in Q \times 2^Q \mid q \in P\right\}\right\} \\
& = & \left\{w \mid (\widehat{\delta}(q_0,w^n),F^{(n)}) \in \left\{(q,P) \in Q \times 2^Q \mid q \in P\right\}\right\} \\
& = & \left\{w \mid \widehat{\delta}(q_0,w) \in F^{(n)}\right\} \\
& = & \left\{w \mid \widehat{\delta}(q_0,w) \in \left\{p \in Q \mid \begin{array}{l}\text{υπάρχει λέξη } u \in \Sigma^* \text{ με } |w| = |u| \\ \text{τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(p,u) \in F\end{array}\right\}\right\} \\
& = & \left\{w \mid \text{ υπάρχει λέξη } u \in \Sigma^* \text{ με } |w| = |u| \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(q_0,wu) \in F \right\} \\
& = & \{w \mid \text{ υπάρχει λέξη } u \in \Sigma^* \text{ με } |w| = |u| \text{ τέτοια ώστε } wu \in L \} \\
& = & L_2\,,
\end{array}$$

όπως χρειάζεται.

4. **(35 μονάδες)** Θεωρούμε γλώσσα L πάνω στο αλφάβητο $\{0,1\}$. Ορίζουμε τη γλώσσα

$$\mathsf{Μέση}(L) \;\; = \;\; \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{υπάρχουν λέξεις } u,v \in \{0,1\}^* \text{ με } |u| = |w| = |v| \text{ και } uwv \in L\}\,.$$

Αποδείξτε ότι αν η L είναι γλώσσα ΝΠΑ, τότε και η $\mathsf{Μέση}(L)$ είναι γλώσσα ΝΠΑ.

Λύση. Θεωρούμε ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο $\mathbf{M} = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ τέτοιο ώστε $L = \mathsf{L}(\mathbf{M})$. Συμβολίζουμε ως $\mathcal{B}$ το σύνολο όλων των $|Q| \times |Q|$ τετραγωνικών λογικών πινάκων. Έτσι, κάθε στοιχείο ενός τέτοιου πίνακα αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος καταστάσεων από το Q και έχει τιμή 0 ή 1. Υπάρχουν, επομένως, $2^{|Q|^2}$ τέτοιοι πίνακες και $|\mathcal{B}| = 2^{|Q|^2}$.

Θα ορίσουμε τώρα ορισμένους ειδικούς τετραγωνικούς (λογικούς) πίνακες $|Q| \times |Q|$.

- Για κάθε σύμβολο $\sigma \in \Sigma$, Ο λογικός πίνακας T_σ ορίζεται ως εξής. Για κάθε κατάσταση $(p,q) \in Q \times Q$,

$$\mathsf{T}_\sigma(p,q) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{αν } \delta(p,\sigma) = q \\ 0, & \text{αλλοιώς} \end{cases} \quad .$$

- Ορίζουμε τώρα τον πίνακα

$$\mathsf{R} \quad = \quad \bigwedge_{\sigma\in\Sigma} \mathsf{T}_\sigma \, .$$

Δηλαδή, π πίνακας R είναι το λογικό άθροισμα όλων των πινάκων T_σ, όπου $\sigma \in \Sigma$. Έτσι, για κάθε ζεύγος καταστάσεων $(p,q) \in Q \times Q$,

$$\mathsf{R}(p,q) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{αν υπάρχει σύμβολο } \sigma \in \Sigma \text{ τέτοιο ώστε } \delta(p,\sigma) = q \\ 0, & \text{αλλοιώς} \end{cases} \quad .$$

- Συμβολίζουμε ως I τον ταυτοτικό (λογικό) πίνακα. Δηλαδή, για κάθε ζεύγος καταστάσεων $(p,q) \in Q \times Q$,

$$\mathsf{I}(p,q) \quad = \quad \begin{cases} 1, \text{αν } p = q \\ 0, \text{αλλοιώς} \end{cases} \quad .$$

Υπενθυμίζουμε ότι το λογικό γινόμενο δύο λογικών πινάκων X και Y (διαστάσεων $|Q| \times |Q|$) ορίζεται ως εξής. Για κάθε ζεύγος καταστάσεων $(p,q) \in Q \times Q$,

$$\mathsf{XY}(p,q) \quad = \quad \bigwedge_{r\in Q} (\mathsf{X}(p,r) \vee \mathsf{Y}(p,r)) \; .$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι για δύο επαγωγικούς ορισμούς.

- Για κάθε λέξη $w \in \Sigma^*$, ορίζουμε τον πίνακα T_w ως εξής.

$$\mathsf{T}_w \quad = \quad \begin{cases} \mathsf{I}, & \text{αν } w = \epsilon \\ \mathsf{T}_u\mathsf{T}_\sigma & \text{αν } w = u\sigma \text{ όπου } u \in \Sigma^* \; \sigma \in \Sigma \end{cases} \quad .$$

- Για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, ορίζουμε τον πίνακα R_n ως εξής.

$$\mathsf{R}_n \quad = \quad \begin{cases} \mathsf{I}, & \text{αν } n = 0 \\ \mathsf{R}_{n-1}\mathsf{R} & \text{αν } n > 0 \end{cases} \quad .$$

Μπορούμε να δείξουμε επαγωγικά ότι για κάθε ζεύγος καταστάσεων $(p,q) \in Q \times Q$,

$$\mathsf{T}_w(p,q) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{αν } \widehat{\delta}(p,w) = q \\ 0, & \text{αλλοιώς} \end{cases} \quad ,$$

και

$$\mathsf{R}_w(p,q) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{αν υπάρχει λέξη } w \in \Sigma^* \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(p,w) = q \\ 0, & \text{αλλοιώς} \end{cases} \quad .$$

Κατασκευάζουμε ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο $\mathbf{M}' = (Q', \Sigma', \delta', q_0', F')$ (για το οποίο θα δείξουμε ότι $\mathsf{L}(\mathbf{M}') = \mathsf{Μέση}(L)$) ως εξής.

- $Q' = \mathcal{B} \times \mathcal{B}$
- $\Sigma' = \Sigma$
- Για κάθε κατάσταση $(\mathsf{X}, \mathsf{Y}) \in Q'(= \mathcal{B} \times \mathcal{B})$ και για κάθε σύμβολο $\sigma \in \Sigma$,

$$\delta'((\mathsf{X}, \mathsf{Y}), \sigma) \;\; = (\mathsf{X}\mathsf{T}_\sigma, \mathsf{Y}\mathsf{R})\,.$$

- $q'_0 = (\mathsf{I}, \mathsf{I})$
- Τέλος, ορίζουμε:

$$F' \;\;=\;\; \{(\mathsf{X}, \mathsf{Y}) \mid \text{ υπάρχει κατάσταση } f \in F \text{ τέτοια ώστε } \mathsf{YXY}(q'_0, f) = 1 \;\}\,.$$

Έχουμε να δείξουμε ότι $\mathsf{L}(\mathbf{M}') = \mathsf{Μέση}(L)$. Θα δείξουμε πρώτα μια βοηθητική πρόταση.

Πρόταση 1. *Για κάθε λέξη $w \in \Sigma^*$,*

$$\widehat{\delta}'((\mathsf{I}, \mathsf{I}), w) \;\;=\;\; (\mathsf{T}_w, \mathsf{R}_{|w|})\,.$$

Η Πρόταση 1 αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή πάνω στο μήκος $|w|$. Έχουμε τώρα ότι

$$\begin{aligned}
& \mathsf{L}(\mathbf{M}') \\
= \;& \left\{ w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}'(q'_0, w) \in F' \right\} \\
= \;& \left\{ w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}'((\mathsf{I}, \mathsf{I}), w) \in F' \right\} \\
= \;& \left\{ w \in \Sigma^* \mid (\mathsf{T}_w, \mathsf{R}_{|w|}) \in F' \right\} \\
= \;& \left\{ w \in \Sigma^* \mid \text{ υπάρχει κατάσταση } f \in F \text{ τέτοια ώστε } \mathsf{R}_{|w|}\mathsf{T}_w\mathsf{R}_{|w|}(q_0, f) = 1 \right\} \\
= \;& \left\{ w \in \Sigma^* \mid \begin{array}{l} \text{υπάρχουν καταστάσεις } f \in F \text{ και } p, q \in Q \text{ τέτοιες ώστε} \\ \mathsf{R}_{|w|}(q_0, p) = 1,\ \mathsf{T}_w(p, q) = 1 \text{ και } \mathsf{R}_{|w|}(q, f) = 1 \end{array} \right\} \\
= \;& \left\{ w \in \Sigma^* \mid \begin{array}{l} \text{υπάρχουν καταστάσεις } f \in F \text{ και } p, q \in Q \text{ τέτοιες ώστε} \\ \text{υπάρχει λέξη } u \in \Sigma^{|w|} \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(q_0, u) = p, \\ \widehat{\delta}(p, w) = q \\ \text{και υπάρχει λέξη } v \in \Sigma^{|w|} \text{ τέτοια ώστε } \widehat{\delta}(q, u) = v \end{array} \right\} \\
= \;& \left\{ w \in \Sigma^* \mid \begin{array}{l} \text{υπάρχουν λέξεις } u, v \in \Sigma^{|w|} \text{ και κατάσταση } f \in F \\ \text{τέτοιες ώστε } \widehat{\delta}(q_0, uwv) = f \end{array} \right\} \\
= \;& \left\{ w \in \Sigma^* \mid \text{ υπάρχουν λέξεις } u, v \in \Sigma^{|w|} \text{ τέτοιες ώστε } \widehat{\delta}(q_0, uwv) \in F \right\} \\
= \;& \left\{ w \in \Sigma^* \mid \text{ υπάρχουν λέξεις } u, v \in \Sigma^{|w|} \text{ τέτοιες ώστε } uwv \in \mathsf{L}(\mathbf{M}) \right\} \\
= \;& \mathsf{Μέση}(\mathsf{L}(\mathbf{M})) \\
= \;& \mathsf{Μέση}(L)\,,
\end{aligned}$$

όπως χρειάζεται.