1η Σειρά Ασκήσεων

1. Γράψτε κανονικές εκφράσεις για τις ακόλουθες γλώσσες:

   (a) $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_k,\ k \in \mathbb{N}$, όπου όλα τα σύμβολα στις άρτιες θέσεις είναι ίδια$\}$.

   $$L_1 = ((a \cup b)a)^*(a \cup b \cup \epsilon) \cup ((a \cup b)b)^*(a \cup b \cup \epsilon)$$

   Το πιο συνηθισμένο λάθος που μπορεί να γίνει εδώ είναι να μην καλύψετε τις λέξεις περιττού μεγέθους.

   (b) $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid$ κάθε σύμβολο b στη λέξη w ακολουθείται από ένα σύμβολο $b\}$.

   $$L_2 = a^*$$

   Το πιο συνηθισμένο λάθος που μπορεί να γίνει εδώ είναι να θεωρήσετε ότι ένα b το οποίο δεν προηγείται από οτιδήποτε (δηλ. το πρώτο b), ότι προηγείται από ένα b.

   (c) $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid$ η w δεν περιέχει τρία συνεχόμενα $a\}$.

   $$L_3 = ((b \cup ab \cup aab)^*(a \cup aa)) \cup (b \cup ab \cup aab)^*$$

   Το πιο συνηθισμένο λάθος που μπορεί να γίνει εδώ είναι η αποτυχία να καλύψετε είτε την περίπτωση όπου η λέξη τελειώνει με a ή aa ή η περίπτωση όπου η λέξη ξεκινά με a ή aa.

   (d) $L_4 = \{w \in \{a,b\}^* \mid$ η w αρχίζει με α και έχει περιττό μήκος ή η w αρχίζει με b και περιέχει ακριβώς δύο $a\}$.

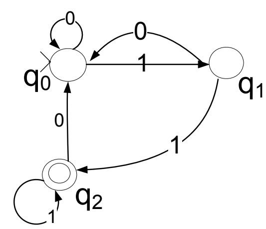
   $$L_4 = a(\Sigma\Sigma)^* \cup b(b^*ab^*ab^*)$$

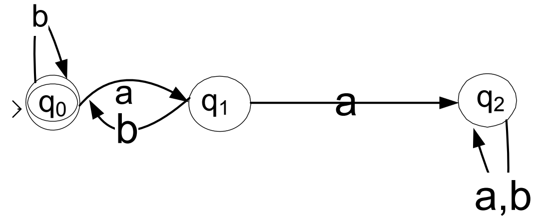
   (e) $L_5 = \{w \in \{a,b\}^* \mid$ η w δεν περιέχει το ίδιο σύμβολο σε συνεχόμενες θέσεις$\}$.

   $$L_5 = (ab)^*(a \cup \emptyset^*) \cup (ba)^*(b \cup \emptyset^*)$$

2. Κατασκευάστε διαγράμματα καταστάσεων για ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα που αποδέχονται τις ακόλουθες γλώσσες:

   (a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid$ η w παριστάνει κάποιο ακέραιο ο οποίος διαιρούμενος από το 4 αφήνει υπόλοιπο $3\}$



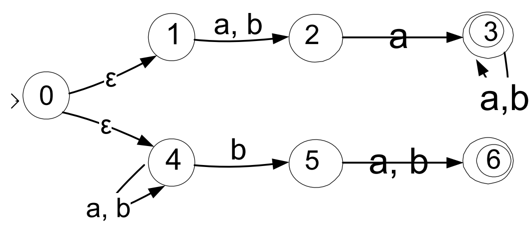


(b) $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid$ κάθε σύμβολο a στη λέξη w ακολουθείται από ένα σύμβολο b $\}$.

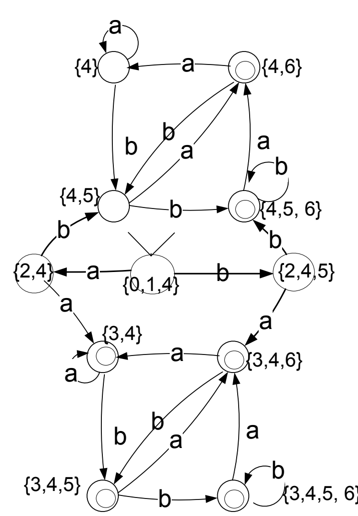
3. (a) Κατασκευάστε διάγράμμα καταστάσεων για μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο το οποίο δέχεται τη γλώσσα:

$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid$ το δεύτερο σύμβολο στη w είναι a ή το προτελευταίο σύμβολο στη w είναι $b\}$

Το διάγραμμα καταστάσεων που θα κατασκευάσετε μπορεί να περιέχει κενές μεταβάσεις.

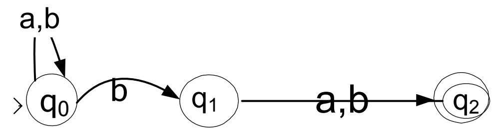


(b) Χρησιμοποιείστε την κατασκευή υποσυνόλων για να μετατρέψετε το μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο που κατασκευάσατε σε ντετερμινιστικό.



4. (a) Κατασκευάστε διάγραμμα καταστάσεων για μη-ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο με τρείς καταστάσεις και χωρίς κενές μεταβάσεις το οποίο δέχεται τη γλώσσα:

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{ το πρότελευταίο σύμβολο στη } w \text{ είναι } b\}$$



(b) Χρησιμοποιείστε την κατασκευή υποσυνόλων για να μετατρέψετε το μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο που κατασκευάσατε σε ντετερμινιστικό.

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$

5. Έστω $\Sigma = \{a, b\}$ και κανονική γλώσσα L πάνω στο αλφάβητο Σ. Θεωρούμε τις παρακάτω γλώσσες. Να αποδείξετε ότι οι ΜΙΞ(L), ΗΧΩ(L) και ΞΕΝΑ(L) είναι κανονικές.

(a) ΜΙΞ$(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \sigma_1 w \in L$ ή $w\sigma_2 \in L$ για κάποια σύμβολα $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma\}$.

Έστω $D = \{Q, \Sigma, \delta, \sigma, F\}$ ένα ΝΠΑ που δέχεται την L. Θα κατασκευάσουμε ένα ΜΝΠΑ $N = \{Q', \Sigma, \delta', \sigma', F'\ \}$ το οποίο αποδέχεται την ΜΙΞ(L). Τυπικά ορίζουμε,

$Q' = \{s'\} \cup (Q \times \{\rhd, \lhd\})$

$$\delta' = \begin{cases} \{(\delta(s, \sigma'), \rhd)\} \cup \{(s, \lhd)\} & \text{εάν } q = s' \text{ και } \sigma = \epsilon \text{ για κάθε } \sigma' \in \Sigma \\ \{(\delta(p, \sigma), x)\} & \text{εάν } q = (p, x) \text{ και } \sigma \in \Sigma,\ x \in \{\rhd, \lhd\} \\ \emptyset & \text{αλλιως} \end{cases}$$

$F' = \{F \times \{\rhd\}\} \cup \{(f, \lhd) : \delta(q, \sigma) = f,\ f \in F,$ για κάποιο $\sigma \in \Sigma\}$

Άτυπα, δημιουργούμε δύο αντίγραφα του αρχικού ΝΠΑ, ένα στο οποίο οι καταστάσεις είναι ζευγάρια από D και $\rhd$ (για να δείξουμε οτι η αρχή της λέξης μιξάρεται) και το δεύτερο στο οποίο οι καταστάσεις είναι ζευγάρια από D και $\lhd$ (για να δείξουμε οτι το τέλος της λέξης μιξάρεται). Για να χειριστούμε τις λέξεις με μιξαρισμένη αρχή προσθέτουμε μεταβάσεις πάνω στο ϵ από τη νέα κατάσταση στις καταστάσεις $(\delta(s, \sigma).\rhd)$ στις οποίες μπορούμε να φτάσουμε από το αρχικό ΝΠΑ σε ένα βήμα από εισόδους από το Σ.

(b) ΗΧΩ$(L) = \{\sigma_1^{n_1} \ldots \sigma_k^{n_k} \mid \sigma_1 \ldots \sigma_k \in L$ και $n_i > 0$ όπου $1 \le i \le k\}$.

Δεδομένης μιας κανονικής έκφρασης που αναγνωρίζει την L, αντικατάστησε κάθε ξεχωριστό σύμβολο σ me $(\sigma\sigma^*)$). Αυτό επιτρέπει σε κάθε χαρακτήρα σε μια αποδεκτή λέξη να επαναλαμβάνεται οσεσδήποτε φορές. Αφού η τροποποίηση έχει σαν αποτέλεσμα μια κανονική έκφραση, η ΗΧΩ(L) είναι κανονική.

(c) ΞΕΝΑ$(L) = \{\sigma_1 \ldots \sigma_k \mid \sigma_1 \ldots \sigma_k \in L$ και $\sigma_i \ne \sigma_{i+1}$ όπου $1 \le i < k\}$.

ΞΕΝΑ$(L) = L \cap \overline{\Sigma^* aa \Sigma^* \cup \Sigma^* bb \Sigma^*}$ και οι κανονικές γλώσσες είναι κλειστές ως προς το συμπλήρωμα και την τομή.

Παράδοση: 29 Φεβρουαρίου.