ΕΠΛ 232: Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Κατ'οίκον Εργασία 1

Ημερομηνία Παράδοσης: 15/02/05

1. Σας δίνεται ένας πίνακας A από n ταξινομημένους αριθμούς οι οποίοι μετακινήθηκαν κυκλικά κατά k θέσεις προς τα δεξιά, και κάποιος ακέραιος m. Για παράδειγμα, ο πίνακας [35, 42, 5, 15, 27, 31] είναι ένας ταξινομημένος πίνακας ο οποίος έτυχε μετακίνησης κατά 2 θέσεις προς τα δεξιά, ενώ ο [15, 27, 31, 35, 42, 5] έτυχε μετακίνησης κατά 5 θέσεις προς τα δεξιά.

   (α) Υποθέστε ότι γνωρίζετε τον αριθμό k. Να δώσετε αλγόριθμο χρονικής πολυπλοκότητας O(1) ο οποίος να βρίσκει το m-οστό στοιχείο του πίνακα.

   (β) Υποθέστε ότι *δεν* γνωρίζετε τον αριθμό k. Να δώσετε αλγόριθμο χρονικής πολυπλοκότητας O(lg n) ο οποίος να βρίσκει το m-οστό στοιχείο του πίνακα.

   (γ) Υποθέστε ότι σας δίνονται δύο πίνακες A και B από n ταξινομημένους αριθμούς οι οποίοι μετακινήθηκαν κυκλικά κατά k_1 και k_2 θέσεις προς τα δεξιά, αντίστοιχα, και κάποιος ακέραιος m. Υποθέστε ότι δεν γνωρίζετε τους αριθμούς k_1 και k_2. Να δώσετε αποδοτικό αλγόριθμο ο οποίος να βρίσκει το m-οστό στοιχείο των δύο πινάκων.

2. Σε μία τάξη υπάρχουν n φοιτητές. Ο βοηθός του μαθήματος θέλει να χωρίσει τους φοιτητές σε k ομάδες, όπου κάθε ομάδα θα περιέχει τουλάχιστον δύο φοιτητές. Για απλούστευση της διαδικασίας ο βοηθός έχει κατατάξει τους φοιτητές σε αλφαβητική σειρά, έστω $S_1, S_2, \ldots, S_n$, και θα κάνει $k - 1$ τομές για να σχηματίσεις τις k ομάδες.

   Οι φοιτητές, στην προσπάθεια τους να δημιουργήσουν ομάδες με φίλους τους, έχουν δώσει στον βοηθό ένα πίνακα $F[n,n]$ όπου $F[i,j] = 1$ αν οι φοιτητές S_i, S_j είναι φίλοι, διαφορετικά $F[i,j] = 0$.

   (α) Να δώσετε αλγόριθμο χρονικής πολυπλοκότητας O(n^2) ο οποίος να υπολογίζει πίνακα $T[n,n]$, όπου, για κάθε $1 \leq i \leq j \leq n$, στη θέση $T[i,j]$ να περιέχεται ο αριθμό φιλιών που υπάρχουν ανάμεσα στους φοιτητές $S_i, \ldots, S_j$.

   (β) Να δώσετε αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού, χρονικής πολυπλοκότητας O($k \cdot n^2$), ο οποίος να υπολογίζει σημεία για τις $k - 1$ τομές, μεγιστοποιώντας τον αριθμό φιλιών που ικανοποιούνται στις ομάδες που σχηματίζονται.

3. Είστε υπεύθυνοι για τη διοργάνωση μιας κοινωνικής εκδήλωσης σε μια εταιρεία. Η εταιρεία αυτή έχει ιεραρχική δομή, δηλαδή, η σχέση **εργοδότης** $=\{(\alpha,\beta) \mid$ αν ο α είναι αφεντικό του $\beta\}$ σχηματίζει δένδρο, με ρίζα τον διευθυντή της εταιρείας. Καλείστε να αποφασίσετε ποια από τα μέλη της να προσκαλέσετε σύμφωνα με τις εξής προδιαγραφές:

   (i) Θα πρέπει να βεβαιωθείτε πως αν καλέσετε τον Α, τότε δεν θα καλέσετε το πρόσωπο που βρίσκεται αμέσως πιο πάνω από τον Α στην ιεραρχία, δηλαδή, το αφεντικό του.

   (ii) Θέλετε να καλέσετε τον μέγιστο δυνατό αριθμό ατόμων.

Να γράψετε αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ο οποίος να υπολογίζει τη λίστα των καλεσμένων και να αναλύσετε τον χρόνο εκτέλεσής του.

4. Σας δίνεται ένα σύνολο απαιτήσεων για κρατήσεις αιθουσών (s_1, f_1), …, (s_n, f_n), όπου τα s_i και f_i, είναι οι χρόνοι εκκίνησης και συμπλήρωσης της διάλεξης, αντίστοιχα, που αντιστοιχούν στην κράτηση i. Θέλουμε να υπολογίσουμε μία ανάθεση αιθουσών που να ικανοποιεί όλες τις κρατήσεις με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό αιθουσών.

   (α) Θεωρήστε τον ακόλουθο αλγόριθμο: Ανάθεσε όσο το δυνατόν περισσότερες κρατήσεις στην πρώτη αίθουσα, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο της Διάλεξης 4. Συνέχισε με τον ίδιο τρόπο για τη δεύτερη αίθουσα, την τρίτη, κ.λπ., μέχρι να ικανοποιηθούν όλες οι απαιτήσεις.

   Να δείξετε μέσω κατάλληλου αντιπαραδείγματος ότι ο αλγόριθμος αυτός δεν λύνει ορθά το πρόβλημα.

   (β) Να προτείνετε άπληστο αλγόριθμο για το πρόβλημα και να αποδείξετε την ορθότητά του.

5. Θεωρήστε το πρόβλημα εύρεσης ενός ελάχιστου γεννητορικού δένδρου ανάμεσα σε n ξεχωριστά σημεία στο επίπεδο, όπου η απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία δίνεται ως την Ευκλειδική απόσταση. Να αποφασίσετε ποιοι από τους πιο κάτω αλγορίθμους λύνουν ορθά το πρόβλημα δίνοντας είτε απόδειξη, στην περίπτωση που κάποιος αλγόριθμος είναι ορθός είτε αντιπαράδειγμα, στην περίπτωση που είναι λανθασμένος.

   (i) Ταξινόμησε τα σημεία σε αύξουσα σειρά ως προς την x-συντεταγμένη τους. (Υποθέστε πως τα στοιχεία έχουν διαφορετικές μεταξύ τους x-συντεταγμένες. Αυτό δεν βλάπτει τη γενικότητα αφού στην αντίθετη περίπτωση θα μπορούσαμε να μετακινήσουμε ελαφρά τους άξονες.) Έστω $p_1, p_2, \ldots, p_n$ η ταξινομημένη σειρά των στοιχείων. Για κάθε σημείο p_i, $2 \leq i \leq n$, συνέδεσε το p_i με το πλησιέστερο προς αυτό σημείο από τα $p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}$, και επέστρεψε το δένδρο που σχηματίζεται.

   (ii) Χώρισε τα στοιχεία στα $n/2$ αριστερότερα (σύνολο L) και τα $n/2$ δεξιότερα (σύνολο R) . Αναδρομικά βρες ελάχιστα γεννητορικά δένδρα για τα σύνολα L και R. Ένωσε τα δύο δένδρα συνδέοντας το ζεύγος των στοιχείων $x \in L$, $y \in R$ με τη μικρότερη δυνατή απόσταση.

   (iii) Θεώρησε όλα τα ζεύγη σημείων σε αύξουσα σειρά της μεταξύ τους απόστασης. Ξεκίνησε με το κενό δένδρο. Επέλεξε το πρώτο στη σειρά ζεύγος (δηλαδή τα δύο σημεία με τη μικρότερη μεταξύ τους απόσταση). Αν τα δύο σημεία δεν βρίσκονται ήδη στο δένδρο, τότε πρόσθεσέ την ακμή που τα ενώνει σε αυτό, διαφορετικά αγνόησε την. Συνέχισε με το επόμενο ζεύγος το οποίο επεξεργάσου με τον ίδιο τρόπο, και ούτω καθεξής, μέχρι να θεωρήσεις όλα τα ζεύγη σημείων.