

4η Σειρά Ασκήσεων

- Όλα τα προβλήματα είναι ισοδύναμα. Παράδοση: 10 Απριλίου 2009. (στην έναρξη της διάλεξης).
1. [Διασκευή του Προβλήματος 7.9 από το βιβλίο Algorithm Design των Kleinberg και Tardos.] Θεωρούμε μία περιοχή όπου συνέβει ένας μεγάλος σεισμός. Εξ αιτίας του σεισμού, υπάρχουν n τραυματίες, και ο καθένας τους πρέπει να μεταφερθεί εσοευσμένα σε ένα από τα k νοσοκομεία της περιοχής, κάτω από τους εξής περιορισμούς:
 - Ο κάθε τραυματίας μπορεί να μεταφερθεί σε ένα νοσοκομείο που απέχει μέχρι και 2 χιλιόμετρα από την τρέχουσα θέση του.
 - Για να μην δημιουργηθούν υπερφορτώσεις, το κάθε νοσοκομείο μπορεί να δεχτεί το πολύ $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ τραυματίες.

Παρουσιάστε και αναλύστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο ο οποίος θα αποφασίζει κατά πόσο ή όχι είναι δυνατή η μεταφορά των τραυματιών στα νοσοκομεία (κάτω από τους δύο περιορισμούς).

2. [Διασκευή του Προβλήματος 7.12 από το βιβλίο Algorithm Design των Kleinberg και Tardos.] Θεωρούμε ένα δίκτυο ροής $G = (V, E)$ με ακμές μοναδιαίας χωρητικότητας και μία (θετική) ακέραια παράμετρο k . Θέλουμε να διαγράψουμε k ακμές ώστε να μειώσουμε όσο το δυνατόν περισσότερο την μέγιστη ροή για το δίκτυο ροής που θα προκύψει. Παρουσιάστε και αναλύστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για την διαγραφή των k ακμών.
3. [Διασκευή του Προβλήματος 7.19 από το βιβλίο Algorithm Design των Kleinberg και Tardos.] Η ιατρική συμβουλευτική εταιρία Γιατροί Χωρίς Σαββατοκυρίαχα έχει να επιλύσει ένα πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού ενός νοσοκομείου με k γιατρούς για τις επόμενες n μέρες κάτω από τους εξής δύο περιορισμούς:
 - Για τη μέρα i , όπου $1 \leq i \leq n$, χρειάζεται να είναι παρόντες (ακριβώς) p_i γιατροί στο νοσοκομείο.
 - Ο γιατρός j , όπου $1 \leq j \leq k$, έχει ένα σύνολο L_j των ημερών στις οποίες μπορεί να δουλέψει.

Θέλουμε να βρούμε για κάθε γιατρό j , όπου $1 \leq j \leq k$, ένα σύνολο L'_j ημερών στις οποίες θα δουλέψει ώστε να ικανοποιούνται οι δύο περιορισμοί. (Προφανώς, $L'_j \subseteq L_j$ για κάθε γιατρό j , όπου $1 \leq j \leq k$.)

Παρουσιάστε και αναλύστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για το πρόβλημα του χρονοπρογραμματισμού των νοσοκομείων. Ο αλγόριθμός σας πρέπει είτε να βρίσκει μία λύση (κάτω από τους δύο περιορισμούς) είτε να αναφέρει ότι δεν υπάρχει λύση.

4. [Διασκευή του Προβλήματος 7.22 από το βιβλίο Algorithm Design των Kleinberg και Tardos.] Θεωρούμε ένα πίνακα \mathbf{M} διαστάσεων $n \times n$ με κάθε στοιχείο του m_{ij} , όπου $1 \leq i \leq n$ και $1 \leq j \leq n$, ίσο με 0 ή 1. Λέμε ότι ο πίνακας \mathbf{M} είναι αναδιατάξιμος αν είναι δυνατό να αντιμεταθέσουμε κάποια από τα ζευγάρια των ακμών του και κάποια από τα ζευγάρια των στηλών του (με οποιαδήποτε σειρά) έτσι ώστε, μετά από τις αντιμεταθέσεις, όλα τα διαγώνια στοιχεία του \mathbf{M} να είναι ίσα με 1.
- (α) Δώστε ένα παράδειγμα ενός πίνακα \mathbf{M} όπου σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του, υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο ίσο με 1, αλλά ο \mathbf{M} δεν είναι αναδιατάξιμος.
 - (β) Παρουσιάστε και αναλύστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο ο οποίος αποφασίζει κατά πόσο ή όχι ο πίνακας \mathbf{M} είναι αντιστρέψιμος.