

5η Σειρά Ασκήσεων

- Όλα τα προβλήματα είναι ισοδύναμα. Παράδοση: 28 Απριλίου 2009. (στην έναρξη της διάλεξης).

1. [Διασκευή του Προβλήματος 13.1 από το βιβλίο Algorithm Design των Kleinberg και Tardos.] Στο πρόβλημα του 3-Χρωματισμού, μας δίνεται ένας γράφος $G = (V, E)$ και θέλουμε να χρωματίσουμε κάθε κορυφή του με ένα από τρία χρώματα, ακόμη και αν δεν είναι δυνατό να δώσουμε διαφορετικά χρώματα σε κάθε ζευγάρι γειτονικών κόμβων. Λέμε ότι μία ακμή (u, v) ικανοποιείται αν τα χρώματα που αποδίδονται στις κορυφές u και v είναι διαφορετικά. Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τον αριθμό των ακμών που ικανοποιούνται. Έστω c^* ο μέγιστος δυνατός αριθμός ακμών που ικανοποιούνται σε έναν 3-χρωματισμό.

Παρουσιάστε και αναλύστε έναν πιθανοτικό (πολυωνυμικό) αλγόριθμο ο οποίος παράγει έναν 3-χρωματισμό στον οποίο ο αναμενόμενος αριθμός m των ακμών που ικανοποιούνται θα είναι $m \geq \frac{2}{3} c^*$.

2. [Διασκευή του Προβλήματος 13.12 από το βιβλίο Algorithm Design των Kleinberg και Tardos.] Θεωρείστε την ακόλουθη παραλλαγή του αλγορίθμου συρρίκνωσης για την εύρεση μίας ελάχιστης αποκοπής (η οποία ξεχωρίζει την πηγή s από τον προορισμό t) σε ένα δίκτυο ροής με μοναδιαίες χωρητικότητες.

-
- Συρρικνώνουμε τις ακμές επαναληπτικά ως εξής:

- Σε μία δεδομένη επανάληψη, έστω s και t οι υπερκορυφές που περιέχουν τις αρχικές κορυφές s και t , αντίστοιχα.
 - Διαγράφουμε τις ακμές που συνδέουν τις κορυφές s και t και επιλέγουμε μία ακμή ομοιόμορφα και τυχαία μεταξύ εκείνων που απομένουν, την οποία και συρρικνώνουμε.
-

Δώστε ένα παράδειγμα για να αποδείξετε ότι η πιθανότητα να βρει ο αλγόριθμος αυτός μία ελάχιστη αποκοπή σε ένα δίκτυο ροής είναι εκθετικά μικρή.

3. [Διασκευή του Προβλήματος 13.17 από το βιβλίο Algorithm Design των Kleinberg και Tardos.] Παίζουμε ένα τυχερό παιχνίδι στο οποίο κάνουμε μία σειρά από n παρτίδες. Σε κάθε παρτίδα, το κέρδος αυξάνεται κατά 1 με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ και μειώνεται κατά 1 με πιθανότητα $\frac{2}{3}$. Αρχικά, το κέρδος είναι 0.

Δείξτε ότι ο αναμενόμενος αριθμός παρτίδων μετά από τις οποίες το κέρδος είναι θετικό είναι φραγμένο από μία σταθερά c (η οποία είναι ανεξάρτητη του n). ‘

4. [Διασκευή του Προβλήματος 10.9 από το βιβλίο *Algorithm Design* των Kleinberg και Tardos.] Μας δίνεται ένα δυαδικό δένδρο με άρτιο αριθμό κορυφών, και ένα μη αρνητικό βάρος σε κάθε ακμή. Θέλουμε να βρούμε μία διαμέριση του συνόλου των κορυφών σε δύο σύνολα ίσου μεγέθους έτσι η βαρύτητα της αποκοπής μεταξύ των δύο συνόλων να μεγιστοποιηθεί. (Η βαρύτητα της αποκοπής είναι το συνολικό βάρος των χιαστί ακμών ως προς την αποκοπή.)

Παρουσιάστε και αναλύστε ένα πολυωνυμικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα.