Ενδιάμεση Εξέταση

Απαντείστε όλα τα θέματα. Η διάρκεια της εξέτασης είναι **80** λεπτά.

1. (20+10 = 30 **μονάδες**) Έχουμε να υπολογίσουμε το γινόμενο $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ των δύο $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων $\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} I & J \\ K & L \end{pmatrix}$. Μία παραλλαγή του αλγορίθμου του Strassen βασίζεται σε διαφορετικές αλγεβρικές ταυτότητες και έχει ως εξής:

(α) Κάνε πρώτα τους εξής υπολογισμούς:
   i. $s_1 := G + H$
   ii. $s_2 := s_1 - E$
   iii. $s_3 := E - G$
   iv. $s_4 := F - s_2$
   v. $s_5 := J - I$
   vi. $s_6 := L - s_5$
   vii. $s_7 := L - J$
   viii. $s_8 := s_6 - K$

(β) Συνέχισε υπολογίζοντας αναδρομικά:
   i. $m_1 := s_2 \cdot s_6$
   ii. $m_2 := E \cdot I$
   iii. $m_3 := F \cdot K$
   iv. $m_4 := s_3 \cdot s_7$
   v. $m_5 := s_1 \cdot s_5$
   vi. $m_6 := s_4 \cdot L$
   vii. $m_7 := H \cdot s_8$

(γ) Συνέχισε υπολογίζοντας:
   i. $t_1 := m_1 + m_2$
   ii. $t_2 := t_1 + m_4$

(δ) Τέλος, επίστρεψε σαν έξοδο:
   i. $A := m_2 + m_3$
   ii. $B := t_1 + m_5 + m_6$
   iii. $C := t_2 - m_7$
   iv. $D := t_2 + m_5$

(α) Δείξτε ότι ο αλγόριθμος αυτός είναι πράγματι ορθός — δηλαδή, δείξτε ότι *(i)* $A = E \cdot I + F \cdot K$, *(ii)* $B = E \cdot J + F \cdot L$, *(iii)* $C = G \cdot I + H \cdot K$, και *(iv)* $D = G \cdot J + H \cdot L$.

(β) Αναλύστε την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου (ως συνάρτηση του n).

2. **(35 μονάδες)** Ένα ομογενές πολυώνυμο δύο μεταβλητών και βαθμού n είναι ένα πολυώνυμο της μορφής

$$P(x, y) \;=\; \sum_{0 \leq i,j \leq n \;|\; i+j=n} \alpha_{ij} x^i y^j \,.$$

Όλοι οι συντελεστές α_{ij}, όπου $0 \leq i, j \leq n$ και $i + j = n$, είναι ακέραιοι.

Παρουσιάστε κατάλληλο αλγόριθμο αποτίμησης του πολυωνύμου $P(x, y)$ στο αυθαίρετο σημείο (x_0, y_0). (Δηλαδή, ο αλγόριθμός σας θα υπολογίζει την τιμή $P(x_0, y_0)$.) Ο αλγόριθμός σας πρέπει να χρησιμοποιεί $\Theta(n)$ αριθμητικές πράξεις (δηλαδή, προσθέσεις, πολλαπλασιασμούς ή διαιρέσεις) στη χειρότερη περίπτωση.

Υπόδειξη: Μετασχηματίστε κατάλληλα το πολυώνυμο $P(x, y)$ σε πολυώνυμο μίας μεταβλητής.

3. **(10+20+5 = 35 μονάδες)** Σε ένα διαγωνισμό τριάθλου με n διαγωνιζομένους αθλητές, κάθε διαγωνιζόμενος πρέπει να κολυμπήσει 20 γύρους σε μία πισίνα, να διασχίσει με ποδήλατο 10 μίλια και μετά να τρέξει 3 μίλια. Το σχέδιο είναι να στέλνουμε τους διαγωνιζόμενους διαδοχικά σύμφωνα με τον ακόλουθο κανόνα ασφαλείας:

> Η πισίνα μπορεί να χρησιμοποιείται από ένα μόνο διαγωνιζόμενο ανά πάσα στιγμή.

Δηλαδή, στην αρχή ένας διαγωνιζόμενος κολυμπά τους 20 γύρους, βγαίνει από την πισίνα και αρχίζει την ποδηλασία. Μόλις ο πρώτος διαγωνιζόμενος βγει από την πισίνα, ένας δεύτερος διαγωνιζόμενος ξεκινά να κολυμπά τους 20 γύρους. Μόλις ο δεύτερος βγει από την πισίνα και αρχίσει την ποδηλασία, ένας τρίτος διαγωνιζόμενος αρχίζει την κολύμβηση, κ.ο.κ.

Κάθε διαγωνιζόμενος i, με $1 \leq i \leq n$, έχει ένα προβλεπόμενο χρόνο κολύμβησης s_i, ένα προβλεπόμενο χρόνο ποδηλασίας b_i και ένα προβλεπόμενο χρόνο τρεξίματος r_i. Ένα χρονοδιάγραμμα προσδιορίζει τη σειρά και τη χρονική στιγμή εκκίνησης των διαγωνιζομένων. Ορίζουμε τον χρόνο ολοκλήρωσης ενός χρονοδιαγράμματος ως τον μικρότερο χρόνο στον οποίο όλοι οι διαγωνιζόμενοι θα έχουν τελειώσει και τα τρία σκέλη του τριάθλου, υποθέτοντας ότι κάθε διαγωνιζόμενος θα δαπανήσει τους προβλεπομένους χρόνους κολύμβησης, ποδηλασίας και τρεξίματος.

(α) Παρουσιάαστε ένα άπληστο αλγόριθμο για τον υπολογισμό ενός χρονοδιαγράμματος με τον ελάχιστο δυνατό χρόνο ολοκλήρωσης.

(β) Χρησιμοποιείστε ένα επιχείρημα ανταλλαγής για να αποδείξετε ότι ο αλγόριθμός σας υπολογίζει πράγματι ένα χρονοδιάγραμμα με τον ελάχιστο δυνατό χρόνο ολοκλήρωσης.

(γ) Ποιά είναι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας (ως συνάρτηση του n);