1η Σειρά Ασκήσεων

1. Το τετράγωνο ενός πίνακα A είναι ο πίνακας $A^2 = A \cdot A$.

   (a) Δείξτε ότι πέντε πολλαπλασιασμοί αρκούν για τον υπολογισμό του τετραγώνου ενός πίνακα 2×2.

   (b) Θα δείξουμε τώρα ότι ένας τετραγωνισμός πινάκων δεν είναι ευκολότερος από τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι αν ο πολλαπλασιασμός $n \times n$ πινάκων μπορεί να γίνει σε χρόνο $S(n) + O(n^c)$, τότε ο πολλαπλασιασμός δύο $n \times n$ πινάκων μπορεί επίσης να γίνει σε χρόνο $O(n^c)$.

      i. Με δεδομένους δύο $n \times n$ πίνακες A και B, δείξτε ότι ο πίνακας $A \cdot B + B \cdot A$ μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $3S(n) + O(n^2)$.

      ii. Με δεδομένους δύο $n \times n$ πίνακες X και Y, ορίζουμε τους $2n \times 2n$ πίνακες A και B, όπου $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Προσδιορίστε μια κατάλληλη έκφραση για τον πίνακα $A \cdot B + B \cdot A$. δείξτε ότι ο πίνακας $A \cdot B + B \cdot A$ μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $3S(n) + O(n^2)$.

      iii. Χρησιμοποιείστε τα ερωτήματα (i) και (ii) για να επιχειρηματολογήσετε ότι το γινόμενο $X \cdot Y$ μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $3S(2n) + O(n^2)$. Συμπεράνετε ότι ο υπολογισμός $n \times n$ πινάκων μπορεί να γίνει σε χρόνο $O(n^c)$.

2. Μας δίνονται n ακέραιοι $a_1, \cdots, a_n$. Μας ζητείται να βρούμε τους συντελεστές $c_0, \cdots, c_{n-1}$ του πολυωνύμου $(x + a_1) \cdot (x + a_2) \cdots \cdot (x + a_n) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0$. Παρουσιάστε ένα αλγόριθμο του τύπου διαίρει-και-βασίλευε για το πρόβλημα αυτό με χρονική πολυπλοκότητα $O(n\lambda\gamma^2 n)$.

3. Μας δίνονται οι ακέραιοι n, k και οι πιθανότητες $p_1, \cdots, p_n$. Για κάθε i, $1 \leq i \leq n$, p_i είναι η πιθανότητα η ρίψη i ενός νομίσματος να έχει αποτέλεσμα την "κορώνα". Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να έχουμε σαν αποτέλεσμα την "κορώνα" k φορές σε n ρίψεις του νομίσματος. Δώστε ένα αλγόριθμο με χρονική πολυπλοκότητα (αριθμό προσθέσεων και πολλαπλασιασμών) $O(n^2)$ για τον υπολογισμό της πιθανότητας.

4. Έστω $D = \{d_1, \cdots, d_n\}$ ένα σύνολο από νομισματικές αξίες, όπου $d_i \geq 1$, και ακέραιος. Έχουμε ένα μη φραγμένο σύνολο νομισμάτων από κάθε αξία. Κάποιος μας ζητά να δώσουμε νομίσματα για το ποσό των A Euro: Το ποσό αυτό θα προέλθει από τα νομίσματα που έχουμε στη διάθεση μας. Αν μπορούμε να δώσουμε το ποσό αυτό, λέμε ότι το A είναι αναπαραστήσιμο στο D.

   (a) Δώστε ένα αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ο οποίος, όταν το A είναι αναπαραστήσιμο στο D, βρίσκει την αναπαράσταση του με τον ελάχιστο αριθμό νομισμάτων.

   (b) Δώστε ένα αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ο οποίος, με δεδομένα τα A και D, βρίσκει τον αριθμό των αναπαραστάσεων του A στο D.

Παράδοση: 29 Φεβρουαρίου.