ΕΠΛ 436 Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα 8/4/2008
Μ. Μαυρονικόλας

3η Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: 15/4/2008

1. Δίδεται ἕνα δίκτυο ροῆς $G=(V,E)$ μέ συνάρτηση χωρητικότητας c. Μιά ἀκμή $e \in E$ καλεῖται *κρίσιμη* ἄν αὔξηση τῆς χωρητικότητας $c(e)$ τῆς e ὁδηγεῖ σέ αὔξηση τῆς μέγιστης ροῆς στό G. Δῶστε ἕνα ἀλγόριθμο ὁ ὁποῖος προσδιορίζει ὅλες τίς κρίσιμες ἀκμές τοῦ G. Ἡ χρονική πολυπλοκότητα τοῦ ἀλγόριθμου σας πρέπει νά εἶναι $\Theta(M(|V|,|E|)+|E|)$, ὅπου $M(|V|,|E|)$ ἡ χρονική πολυπλοκότητα τοῦ ἀλγορίθμου εὕρεσης τῆς μέγιστης ροῆς σέ ἕνα δίκτυο.

2. Σέ ἕνα δίκτυο ροῆς, μιά ἀκμή καλεῖται *μείζονος σημασίας* ἄν ἡ διαγραφή της ἀπό τό δίκτυο ροῆς μειώνει τήν τιμή τῆς μέγιστης ροῆς τόσο τουλάχιστον ὅσο καί ἡ διαγραφή ὁποιασδήποτε ἄλλης ἀκμῆς. Ἀποδεῖξτε ἤ διαψεύστε τόν ἀκόλουθο ἰσχυρισμό: Τουλάχιστον μία ἀπό τίς ἀκμές μείζονος σημασίας σέ ἕνα δίκτυο ροῆς εἶναι ἀκμή μέγιστης χωρητικότητας σέ μία ἐλάχιστη τομή (= τομή μέ ἐλάχιστη χωρητικότητα κατά μῆκος της).

3. Ἔστω $G=(V,E)$ ἕνα δίκτυο ροῆς μέ συνάρτηση χωρητικότητας c τέτοια ὥστε $c(e)=1$ γιά κάθε ἀκμή $e \in E$. Ὑποθέστε ἁπλοποιητικά ὅτι $|E| \in \Omega(|V|)$.

   α. Ἔστω ὅτι ἡ γενική μεθοδολογία Ford-Fulkerson ὑλοποιεῖται μέ χρήση τοῦ ἀλγόριθμου ἀναζήτησης κατά βάθος γιά τήν εὕρεση ἐπεκτεταμένων μονοπατιῶν στό δίκτυο περίσσειας.

Ποιά ἡ χρονική πολυπλοκότητα τοῦ προκύπτοντος ἀλγορίθμου;

β. Ἔστω ὅτι ἡ μέγιστη ροή γιά τό G ἔχει ὑπολογισθεῖ, καί μιά καινούργια ἀκμή μέ μοναδιαία χωρητικότητα προστίθεται στό E. Περιγράψτε ἀποδοτικό ἀλγόριθμο γιά τήν ἀνανέωση τῆς μέγιστης ροῆς. Ἀναλύστε τή χρονική πολυπλοκότητα τοῦ ἀλγορίθμου σας.

γ. Ἔστω ὅτι ἡ μέγιστη ροή γιά τό G ἔχει ὑπολογισθεῖ, ἀλλά μιά παλιά ἀκμή ἀφαιρεῖται τώρα ἀπό τό E. Περιγράψτε ἀποδοτικό ἀλγόριθμο γιά τήν ἀνανέωση τῆς μέγιστης ροῆς. Ποιά ἡ χρονική πολυπλοκότητα τοῦ ἀλγορίθμου σας;

4. Βρεῖτε ἕνα δίκτυο ροῆς γιά τό ὁποῖο ἡ γενική μεθοδολογία Ford-Fulkerson ἀπαιτεῖ ἀριθμό ἐπαναλήψεων ἴσο μέ τήν τιμή τῆς μέγιστης ροῆς, ὁ ὁποῖος, ἑπομένως, δέν φράσσεται ἀπό πάνω ἀπό ὁποιαδήποτε συνάρτηση τῶν ἀριθμῶν κορυφῶν ἤ ἀκμῶν τοῦ δικτύου.

5. Στό πρόβλημα αὐτό θεωροῦμε μιά παραλλαγή τοῦ προβλήματος ἐπιλογῆς δραστηριοτήτων πού εἴδαμε στό μάθημα.

Ἔχουμε καί πάλι ἕνα σύνολο ἀπό N δραστηριότητες $\{[s_1, f_1), [s_2, f_2), \ldots, [s_N, f_N)\}$, ὅπου γιά κάθε i, $0 \leq s_i < f_i$.

Μιά <u>ἐπιτρεπτή διαλογή</u> εἶναι ἕνα ζεῦγος ὑποσυνόλων $B_1 \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ καί $B_2 \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ τά ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τίς ἑξῆς συνθῆκες:

1. $B_1 \cap B_2 = \emptyset$
2. Ἄν $i, j \in B_1 \Rightarrow [s_i, f_i) \cap [s_j, f_j) = \emptyset$.
3. Ἄν $i, j \in B_2 \Rightarrow [s_i, f_i) \cap [s_j, f_j) = \emptyset$.

Δῶστε ἕνα ἄπληστο ἀλγόριθμο ὁ ὁποῖος κατασκευάζει μιά <u>βέλτιστη</u> ἐπιτρεπτή διαλογή, δηλ. μιά ἐπιτρεπτή διαλογή ἡ ὁποία μεγιστοποιεῖ τό ἄθροισμα $|B_1| + |B_2|$. Ἀποδεῖξτε προσεκτικά τήν ἰδιότητα αὐτή τοῦ ἀλγορίθμου σας.