

1η Σειρά Θεωρητικών Ασκήσεων

Παράδοση: 30 Σεπτεμβρίου 2005 (στην έναρξη της διάλεξης)

Το *κόψιμο τούρτας* είναι μια αφαιρετικότητα για το πρόβλημα διαμοιρασμού των πόρων σε ένα κατανεμημένο σύστημα.

Θεωρούμε ένα κατανεμημένο σύστημα το οποίο αποτελείται από τρεις μόνο οντότητες, η κάθε μία από τις οποίες έχει τη δική της συνάρτηση χρησιμότητας για το διαμοιραζόμενο πόρο. Για καθένα από τους παρακάτω αλγόριθμους για το κόψιμο τούρτας, αποφασίστε αν ο αλγόριθμος παρέχει δικαιοσύνη προς τις οντότητες.

- Αν **NAI**, αποδείξτε το.
- Αν **OXI**, δώστε *αντιπαράδειγμα*. (Το αντιπαράδειγμα θα είναι μια συλλογή από συναρτήσεις χρησιμότητας για τις οποίες ο αλγόριθμος προσδιορίζει μια λύση που δεν είναι δίκαιη προς όλες τις οντότητες.)

1. Η πρώτη οντότητα μοιράζει την τούρτα σε τρία ίσα μέρη. Η δεύτερη οντότητα διαλέγει ένα από αυτά, και ακολούθως ένα άλλο η δεύτερη, τα οποία μοιράζονται από κοινού με τον αλγόριθμο *Cut&Choose*. Η πρώτη οντότητα παίρνει το κομμάτι που έμεινε.
2. Η πρώτη οντότητα μοιράζει την τούρτα σε τρία ίσα μέρη. Η δεύτερη οντότητα μοιράζει κάθε μέρος σε τρία ίσα μέρη. Η τρίτη οντότητα παίρνει τον ελάχιστο δυνατό αριθμό κομματιών έτσι ώστε να είναι ικανοποιημένη. Ακολούθως η πρώτη οντότητα και η δεύτερη οντότητα μοιράζουν μεταξύ τους τα υπόλοιπα κομμάτια με τον αλγόριθμο *Cut&Choose*.
3. Η πρώτη οντότητα μοιράζει την τούρτα σε τρία ίσα μέρη P_1 , P_2 , P_3 . Η δεύτερη οντότητα διαλέγει ένα από αυτά, έστω ότι αυτό είναι το P_1 . Η τρίτη οντότητα το μοιράζει σε άλλα αντίστοιχα τρία ίσα μέρη. Η πρώτη οντότητα διαλέγει ένα από αυτά, ακολούθως η δεύτερη, και τελικά η τρίτη.

Μένουν τώρα τα κομμάτια P_2 και P_3 . Η τρίτη οντότητα διαλέγει ένα από αυτά, έστω ότι αυτό είναι το P_2 . Η δεύτερη οντότητα το μοιράζει σε άλλα αντίστοιχα τρία ίσα μέρη. Η πρώτη οντότητα διαλέγει ένα από αυτά, ακολούθως η τρίτη, και τελικά η δεύτερη.

Μένει τώρα το κομμάτι P_3 . Η τρίτη οντότητα το μοιράζει σε άλλα αντίστοιχα τρία ίσα μέρη. Η τρίτη οντότητα διαλέγει ένα από αυτά, ακολούθως η δεύτερη, και τελικά η τρίτη.

4. Η πρώτη οντότητα μοιράζει την τούρτα σε τρία ίσα μέρη P_1 , P_2 και P_3 .

Η δεύτερη οντότητα αγνοεί το κομμάτι εκείνο από τα τρία που έχει (για την ίδια) τη μικρότερη αξία, και μοιράζει καθένα από τα υπόλοιπα δύο κομμάτια σε δύο ίσα μέρη.

Η τρίτη οντότητα διαλέγει είτε το κομμάτι που δεν μοιράστηκε από τη δεύτερη οντότητα, είτε ένα μέρος από κάθε κομμάτι που η δεύτερη οντότητα μοίρασε.

Στη συνέχεια, η πρώτη οντότητα παίρνει το κομμάτι που δεν μοιράστηκε από τη δεύτερη οντότητα αν αυτό είναι ακόμη διαθέσιμο. Αν δεν είναι, η πρώτη οντότητα παίρνει ένα μέρος από κάθε κομμάτι που η δεύτερη οντότητα μοίρασε.

Η δεύτερη οντότητα παίρνει ότι έχει μείνει.