Σειρά Προβλημάτων 1

Ημερομηνία Παράδοσης: 03/10/18

Άσκηση 1 (16 μονάδες)

Να διατυπώσετε τον πιο κάτω συλλογισμό στον Προτασιακό Λογισμό και να τον αποδείξετε χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο της Επίλυσης. Δηλαδή, να δείξετε ότι αν ισχύουν οι πέντε πρώτες προτάσεις, τότε ισχύει και το συμπέρασμα στην έκτη πρόταση. Κατά τη μετάφραση των προτάσεων στον ΠΛ να χρησιμοποιήσετε μόνο πέντε μεταβλητές προσδιορίζοντας με σαφήνεια ποια πρόταση της φυσικής γλώσσας αντιστοιχεί σε κάθε μεταβλητή.

> *Αν η κίνηση υπάρχει, τότε κάποιος μπορεί να μετακινηθεί από το σημείο Χ στο σημείο Υ σε πεπερασμένο χρόνο.*
>
> *Δεδομένου ότι ανά πάσα στιγμή κάποιος μπορεί να βρίσκεται μόνο σε ένα σημείο, δεν είναι δυνατόν κάποιος να διασχίσει ένα μη πεπερασμένο αριθμό σημείων σε πεπερασμένο χρόνο.*
>
> *Η απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία Χ και Υ μπορεί να διαιρεθεί σε ένα μη πεπερασμένο αριθμό σημείων.*
>
> *Ανά πάσα στιγμή κάποιος μπορεί να βρίσκεται σε ακριβώς ένα σημείο.*
>
> *Αν κάποιος μπορεί να μετακινηθεί από το Χ στο Υ σε πεπερασμένο χρόνο τότε, είτε η απόσταση από το Χ στο Υ δεν μπορεί να διαιρεθεί σε ένα μη πεπερασμένο αριθμό σημείων, είτε κάποιος μπορεί να διασχίσει ένα μη πεπερασμένο αριθμό σημείων σε πεπερασμένο χρόνο.*
>
> *Επομένως, δεν υπάρχει η κίνηση.*

(Ζήνων ο Ελεάτης, 5^{ος} αιώνας π.Χ. – Το Παράδοξο της Κίνησης)

Άσκηση 2 (32 μονάδες)

Να αποδείξετε τα πιο κάτω λογικά επακόλουθα.

(α) $(\neg p \to r) \to (s \wedge \neg t),\ \neg p \to (q \vee r),\ q \to r \vdash \neg t$

(β) $\vdash (p \to q) \vee (q \to r)$

(γ) $p \vee q,\ \neg q \vee r \vdash p \vee r$

(δ) $\vdash ((p \vee q) \to r) \to ((p \to r) \wedge (\neg r \to \neg q))$

(ε) $p \to (q \to r),\ q,\ r \to t,\ (p \to t) \to (q \to s) \vdash s$

Άσκηση 3 (18 μονάδες)

Το σύνολο τελεστών $\Sigma = \{\neg,\vee,\wedge,\to\}$ συχνά συσχετίζεται με τον Προτασιακό Λογισμό λόγω του ότι είναι σε θέση να περιγράψει με φυσικό τρόπο διάφορους συλλογισμούς. Εντούτοις, η ύπαρξη όλων των τελεστών του Σ δεν είναι απαραίτητη για την εκφραστικότητα του Προτασιακού Λογισμού: είναι δυνατό να αφαιρέσουμε κάποιους τελεστές ή ακόμα και να τους αντικαταστήσουμε από άλλους, χωρίς να επηρεάσουμε τη δύναμη της γλώσσας. Μια χρήσιμη έννοια για να αξιολογούμε αν ένα σύνολο από τελεστές είναι ισοδύναμο με το Σ είναι η έννοια της *επάρκειας*. Συγκεκριμένα, ένα σύνολο από τελεστές *C* του Προτασιακού Λογισμού είναι *επαρκές* αν για κάθε πρόταση ϕ που χρησιμοποιεί τελεστές από το σύνολο Σ υπάρχει ισοδύναμη πρόταση ψ όπου η ψ χρησιμοποιεί μόνο τελεστές από το σύνολο C. Για παράδειγμα, το σύνολο $\{\neg, \vee\}$ είναι επαρκές αφού κάθε εμφάνιση των τελεστών $\rightarrow$ και $\wedge$ μπορεί να αντικατασταθεί μέσω των ισοδυναμιών

$$\phi \rightarrow \psi \equiv \neg\, \phi \vee \psi$$
$$\phi \wedge \psi \equiv \neg\, (\neg\phi \vee \neg\, \psi)$$

(α) Να δείξετε ότι το σύνολο {false, $\geq$} είναι ένα επαρκές σύνολο τελεστών, όπου ο τελεστής $\geq$ ορίζεται από τον πιο κάτω πίνακα αλήθειας.

p	*q*	*p* ≥ *q*
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

(β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{ \geq \}$ δεν είναι ένα επαρκές σύνολο τελεστών.

Άσκηση 4 (16 μονάδες)

Θεωρήστε τον τελεστή $p \geq q$ ο οποίος ορίζεται όπως στην Άσκηση 3. Να προτείνετε κανόνες εισαγωγής και απαλοιφής του τελεστή αυτού και να τους χρησιμοποιήσετε για να αποδείξετε το πιο κάτω επακόλουθο.

$$p \geq q \wedge q \geq r,\ \ r \geq s \vdash (\neg u \geq \neg s) \rightarrow (p \geq u)$$

Άσκηση 5 (18 μονάδες)

(α) Ένα σύνολο προτάσεων του Προτασιακού Λογισμού Φ είναι ικανοποιήσιμο αν υπάρχει ανάθεση λογικών τιμών στις ατομικές προτάσεις που αναφέρονται στο Φ η οποία να κάνει όλες τις προτάσεις της Φ ταυτόχρονα αληθείς. Να αποφασίσετε ποια από τα πιο κάτω σύνολα προτάσεων είναι ικανοποιήσιμα και ποια όχι.

(i) $\{ p \rightarrow q, \neg q \}$

(ii) $\{ p \rightarrow q, \neg q \vee r, p \wedge \neg r \}$

(iii) $\{ (p \vee q) \rightarrow r, \neg((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \}$

(β) Να αποφασίσετε ποια από τα πιο κάτω είναι αληθή αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.

(i) Αν $\Gamma \vdash \phi$ και $\Gamma, \phi \vdash \psi$, τότε $\Gamma \vdash \psi$.
(ii) Αν $\Gamma \vdash \phi$ και $\Gamma, \psi \vdash \phi$, τότε $\Gamma \vdash \psi$.
(iii) Αν $\Gamma, \phi \vdash \chi$ και $\Gamma, \psi \vdash \chi$, τότε $\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \chi$
(iv) Αν $\Gamma, \phi \vdash \chi$ και $\Gamma, \psi \vdash \chi$, τότε $\Gamma, \phi \vee \psi \vdash \chi$