ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΠΛ 412: Λογική στην Πληροφορική

Ενδιάμεση Εξέταση

Ημερομηνία : Τετάρτη 24 Οκτωβρίου, 2018
Διάρκεια : 12:00 – 13:30
Διδάσκουσα : Άννα Φιλίππου

Ονοματεπώνυμο: **ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

Αριθμός Ταυτότητας:

Οδηγίες: Να διαβάσετε προσεχτικά και να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις. Να γράψετε τις απαντήσεις σας (καθαρά) στο εξεταστικό δοκίμιο. Ο άριστος βαθμός της εξέτασης είναι 100.

Καλή Επιτυχία!

Ερώτηση	Βαθμός
1	
2	
3	
Τελικός Βαθμός:	

<u>Άσκηση 1</u> [36 μονάδες]

(α) Θεωρήστε μια γλώσσα Κατηγορηματικού Λογισμού η οποία περιέχει τα μη-λογικά σύμβολα:

- **Σταθερές: 0**
- **Συναρτήσεις: $s(x)$**
- **Κατηγορήματα: $A(x)$**

Επιπρόσθετα θεωρήστε τις πιο κάτω προτάσεις:

$\varphi_1 = \forall x \neg (s(x) = 0)$

$\varphi_2 = \forall x \forall y (s(x) = s(y) \to x = y)$

$\varphi_3 = [A(0) \wedge \forall x (A(x) \to A(s(x)))] \to \forall x A(x)$

(i) [10 μονάδες] Να αποδείξετε με ακρίβεια ότι το πιο κάτω λογικό επακόλουθο είναι ψευδές.

$$\varphi_1, \varphi_2 \vdash \varphi_3$$

Με βάση την Ορθότητα του Κατηγορηματικού Λογισμού, το λογικό επακόλουθο είναι ψευδές αν η σημασιολογική συνεπαγωγή $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_3$ είναι επίσης ψευδής. Επομένως, για να δείξουμε το ζητούμενο είναι αρκετό να παρουσιάσουμε μοντέλο στο οποίο να ικανοποιούνται οι προτάσεις φ_1, φ_2 και να διαψεύδεται η πρόταση φ_3. Ένα τέτοιο μοντέλο είναι το εξής:

A: το σύμπαν είναι οι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί
0^A: είναι ο ακέραιος 0
$s^A(x)$: η συνάρτηση $s^A(x) = x + 2$
$A(x)$: το κατηγόρημα ‘ο x είναι άρτιος’

Τότε προφανώς ισχύει η φ_1 η οποία εκφράζει ότι: για κάθε μη αρνητικό ακέραιο x, $x + 2 \neq 0$.

Επίσης ισχύει η φ_2 σύμφωνα με την οποία για κάθε ζεύγος μη αρνητικών ακέραιων x και y, αν $x + 2 = y + 2$ τότε $x = y$.

Εντούτοις, για τη φ_3 έχουμε ότι

$$[\textit{άρτιος}(0) \wedge \forall x\, (\textit{άρτιος}(x) \to \textit{άρτιος}(x+2))\,] \to \forall x\, A(x)$$

η οποία δεν είναι αληθής στο μοντέλο αφού, αν και το 0 είναι άρτιος ακέραιος και επίσης αν ένας αριθμός x είναι άρτιος τότε και ο αριθμός $x + 2$ είναι άρτιος, αυτό δεν σημαίνει ότι όλοι οι ακέραιοι είναι άρτιοι.

(ii) [7 μονάδες] Να δείξετε ότι η πρόταση $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ είναι ικανοποιήσιμη.

Η πρόταση είναι ικανοποιήσιμη αφού ικανοποιείται στο μοντέλο M όπου:

A: το σύμπαν είναι οι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί
0^A: είναι ο ακέραιος 0
$s^A(x)$: η συνάρτηση $s^A(x) = x + 1$
$A(x)$: το κατηγόρημα ‘ο x είναι άρτιος’

Τότε προφανώς ισχύει η φ_1 η οποία εκφράζει ότι: για κάθε μη αρνητικό ακέραιο x, $x + 1 \neq 0$.

Επίσης ισχύει η φ_2 σύμφωνα με την οποία για κάθε ζεύγος μη αρνητικών ακέραιων x και y, αν $x + 1 = y + 1$ τότε $x = y$.

Τέλος, για τη φ_3 έχουμε ότι

$$[\textit{άρτιος}(0) \wedge \forall x\, (\textit{άρτιος}(x) \to \textit{άρτιος}(x+1))\,] \to \forall x\, A(x)$$

η οποία είναι αληθής στο μοντέλο αφού η συνθήκη της συνεπαγωγής και συγκεκριμένα το σκέλος $\forall x\,(\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma(x) \rightarrow \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma(x{+}1))$ είναι ψευδές (άρα η συνεπαγωγή αληθής).

(iii) [7 μονάδες] Να δείξετε ότι η πρόταση $\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$ είναι ικανοποιήσιμη.

Η πρόταση είναι ικανοποιήσιμη αφού ικανοποιείται στο μοντέλο M όπου:

A: το σύμπαν είναι οι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί

0^A: είναι ο ακέραιος 0

$s^A(x)$: η συνάρτηση $s^A(x) = 0$

Τότε προφανώς ισχύει η $\neg\varphi_1$ η οποία εκφράζει ότι όχι για όλους τους ακέραιους $s^A(x) = 0 \neq 0$

Επίσης ισχύει η $\neg\varphi_2$ σύμφωνα με την οποία

$$\neg[\forall x \forall y\,(\, s^A(x) = s^A(y) \rightarrow x = y\,)]$$

(β) [12 μονάδες] Να αποδείξετε ότι η πιο κάτω σημασιολογική συνεπαγωγή είναι έγκυρη *χρησιμοποιώντας τη σημασιολογία του Κατηγορηματικού Λογισμού* (Αλήθεια του Tarski).

$$\forall x\,(P(x) \rightarrow \forall y\, Q(x,y)),\ \forall x\,(\neg R(x) \rightarrow \exists y\, \neg Q(x,y)),\ \neg R(a) \models \exists x\, \neg P(x)$$

Έστω μοντέλο M με σύμπαν A και στοιχείο $a \in$ A, στο οποίο ισχύει

$M \models \forall x\,(P(x) \rightarrow \forall y\, Q(x,y))$ (1)

$M \models \forall x\,(\neg R(x) \rightarrow \exists y\, \neg Q(x,y))$ (2)

$M \models \neg R(a)$ (3)

Από την (2), σύμφωνα με τη σημασιολογία του Tarski, έχουμε ότι

$M \models \neg R(v) \rightarrow \exists y\, \neg Q(v,y)$ για κάθε $v \in$ A

Αφού η πρόταση ικανοποιείται για κάθε $v \in$ A, επίσης ικανοποιείται για a, επομένως

$M \models \neg R(a) \rightarrow \exists y\, \neg Q(a,y)$ και επομένως

$M \models \neg\neg R(a) \vee \exists y\, \neg Q(a,y)$, δηλαδή

$M \models R(a)$ ή $M \models \exists y\, \neg Q(a,y)$ (4)

Συνδυάζονται τα (3) και (4), καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι $M \models \exists y\, \neg Q(a,y)$, και από τη σημασιολογία του Tarksi $M \models \neg Q(a,b)$ για κάποιο $b \in$ A. (5)

Από την (1), σύμφωνα με τη σημασιολογία του Tarski, έχουμε ότι

$M \models P(u) \rightarrow \forall y\, Q(u,y)$ για κάθε $u \in$ A

Αφού η πρόταση ικανοποιείται για κάθε $u \in$ A, επίσης ικανοποιείται για a, επομένως

$M \models P(a) \rightarrow \forall y\, Q(a,y)$

και, συμφωνα με τη σημασιολογία του $\rightarrow$

$M \models \neg P(a)$ ή $M \models \forall y\, Q(a,y)$ (6)

Παρατηρούμε ότι αν $M \models \forall y\, Q(a,y)$, τότε $M \models Q(a,w)$ για κάθε $w \in$ A. Επομένως $M \models Q(a,b)$. Αυτό όμως βρίσκεται σε αντίφαση με το (5), επομένως, από το (6), καταλήγουμε στο συμπέρασμα $M \models \neg P(a)$.

Σύμφωνα με τη σημασιολογία του Tarski, αυτό συνεπάγεται ότι

$M \models \exists x\, \neg P(x)$

και το ζητούμενο έπεται.

<u>Άσκηση 2</u> [32 μονάδες]

(α) [6 μονάδες] Να παρουσιάσετε τον Κανόνα της SLD Επίλυσης και να εξηγήσετε πως η χρήση του κατά την εκτέλεση ενός προγράμματος λογικού προγραμματισμού μπορεί να εμφανίσει το φαινόμενο του μη-ντετερμινισμού.

$$\frac{\leftarrow A_1,\ldots,A_{i-1},\ A_i,\ A_{i+1},\ \ldots,\ A_n, \qquad A \leftarrow B_1,\ldots,B_k,}{\leftarrow\ (A_1,\ldots,A_{i-1},\ B_1,\ldots,B_k,\ A_{i+1},\ \ldots,\ A_n)\ \theta_i} \qquad A_i\theta_i = A\theta_i$$

Σύμφωνα με τον Κανόνα SLD-Επίλυση οποίος εμφανίζεται πιο πάνω, δεδομένου του στόχου ενός προγράμματος

$\leftarrow A_1,\ldots,A_{i-1},\ A_i,\ A_{i+1},\ \ldots,\ A_n$

και μιας εντολής του προγράμματος

$A \leftarrow B_1,\ldots,B_k$

σύμφωνα με την οποία για να υπολογίσουμε το A πρέπει να υπολογίσουμε τα $B_1,\ldots,B_k$, εφόσον ο όρος του στόχου μας A_i μπορεί να ενοποιηθεί με το A μέσω μιας αντικατάσταση θ_i, τότε ο στόχος του προγράμματος μπορεί να μετατραπεί σε $\leftarrow (A_1,\ldots,A_{i-1},\ B_1,\ldots,B_k,\ A_{i+1},\ \ldots,\ A_n)\ \theta_i$.

Κατά την εκτέλεση ενός προγράμματος λογικού προγραμματισμού, χρήση του κανόνα μπορεί να οδηγήσει στο φαινόμενο του μη ντετερμινισμού για δύο λόγους:

1. Ανά πάσα στιγμή μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε από τους όρους του στόχου του προγράμματος για να εφαρμόσουμε πάνω του τον Κανόνα της SLD επίλυσης.
2. Για τον ίδιο όρο του στόχου είναι δυνατό να υπάρχουν περισσότερες από μία γραμμές του προγράμματος οι οποίες μπορούν να ενοποιηθούν με τον όρο.

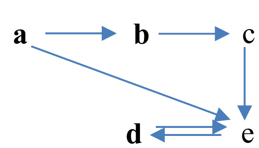
(β) Θεωρήστε το πιο κάτω πρόγραμμα λογικού προγραμματισμού (οι γραμμές εμφανίζονται αριθμημένες).

```
1.    edge(a,b)
2.    edge(c,e)
3.    edge(a,e)
4.    edge(b,c)
5.    edge(d,e)
6.    edge(e,d)

7.    path(X, X, [X])
8.    path(X, Y, X:A) :- edge(X,Z), path(Z,Y,A)

9.    :- path(a,e,M)
```

Η βάση δεδομένων edge περιγράφει τον γράφο που φαίνεται πιο κάτω ενώ η διαδικασία path είναι σε θέση να υπολογίσει μονοπάτια ανάμεσα σε κόμβους του γράφου. Συγκεκριμένα, path(X,Y,M) αν το M αποτελεί μονοπάτι ανάμεσα στους κόμβους X και Y. Για παράδειγμα, path(b, e, [b,c,e]).



Σημείωση: Αν $xs = [x_1, \ldots, x_n]$**, τότε γράφουμε** $x{:}xs$ **για τη λίστα** $[x, x_1, \ldots, x_n]$**.**

(i) [10 μονάδες] Να εφαρμόσετε τη μέθοδο της SLD Επίλυσης για να φτάσετε σε διάψευση του στόχου στη γραμμή 9.

```
…
9.   :- path(a,e,M)
10.  edge(a,Z), path(Z,e,A)      από γραμμή 8 και [a/X, e/Y, a:A/M]
11.  path(b,e,A)                 από γραμμή 1 και [b/Z]
12.  edge(b,Z), path(Z,e,A’)     από γραμμή 8 και [b/X, e/Y, b:A’/A]
13.  path(c,e,A’)                από γραμμή 4 και [c/Z]
14.  edge(c,Z),path(Z,e,A’’)     από γραμμή 8 και [c/X, e/Y, c:A’’/A’]
15.  path(e,e,A’’)               από γραμμή 2 και [e/Z]
16.  ⊥                           από γραμμή 7 και [e/X,[e]/A’’]
```

(ii) [10 μονάδες] Ποια αντικατάσταση ορθής απάντησης προέκυψε κατά την εκτέλεση του προγράμματος στο μέρος (α);

Να παρουσιάσετε διαφορετική εκτέλεση του ίδιου προγράμματος (και για τον ίδιο στόχο) έτσι ώστε η αντικατάσταση ορθής απάντησης που θα προκύψει να είναι διαφορετική από την αντικατάσταση ορθής απάντησης που προέκυψε στο σκέλος (α).

Η αντικατάσταση ορθής απάντησης που προέκυψε είναι η:

M→ a:A → a:b:A’ → a:b:c:A’’ → a:b:c:[e]

Δηλαδή: M → [a,b,c,e]

Μια διαφορετική εκτέλεση για το ίδιο πρόγραμμα είναι η πιο κάτω:

```
…
9.   :- path(a,e,M)
10.  edge(a,Z), path(Z,e,A)      από γραμμή 8 και [a/X, e/Y, a:A/M]
11.  path(e,e,A)                 από γραμμή 3 και [e/Z]
12.  ⊥                           από γραμμή 7 και [e/X,[e]/A]
```

Η αντικατάσταση ορθής απάντησης της συγκεκριμένης εκτέλεσης είναι η:

M→ a:A → a:[e]

Δηλαδή: M → [a,e]

(iii) [6 μονάδες] Να παρουσιάσετε διαφορετική εκτέλεση του προγράμματος η οποία να αποτυγχάνει να φτάσει σε διάψευση του στόχου. Εξηγήστε την απάντησή σας.

Μια τέτοια εκτέλεση είναι εκτέλεση όπου πάντα επιλέγεται να χρησιμοποιείται η γραμμή 8 του προγράμματος πάνω στον όρο path που θα υπάρχει στον στόχο:

```
…
9.   :- path(a,e,M)
10.  edge(a,Z),path(Z,e,A)                         από γραμμή 8 και [a/X, e/Y, a:A/M]
11.  edge(a,Z),edge(X,Z’),path(Z’,e,A’)            από γραμμή 8 και [Z/X, e/Y, Z:A’/A]
12.  edge(a,Z),edge(X,Z’),edge(Z’,Z’’),path(X’,e,A’’)
                                                   από γραμμή 8 και [Z’/X’, e/Y’, Z’:A’’/A’]
13.  …
```

<u>Άσκηση 3</u> [32 μονάδες]

Να αποδείξετε τα πιο κάτω λογικά επακόλουθα *χρησιμοποιώντας τα συστήματα κανόνων* του Προτασιακού Λογισμού (μέρος (α)) και του Κατηγορηματικού Λογισμού (μέρος (β)).

(α) [14 μονάδες] $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

1.	$(p \wedge q) \rightarrow r$		προϋπόθεση	
2.	$p \vee \neg p$		LEM	
3.	p	πρ. υπόθεση	$\neg p$	πρ. υπόθεση
4.	q	πρ. υπόθεση	p	πρ. υπόθεση
5.	$p \wedge q$	$\wedge$ i 3,4	$\perp$	$\neg$ e 3, 4
6.	r	MP 1,5	r	$\perp$ e 5
7.	$q \rightarrow r$	$\rightarrow$ i 4-6	$p \rightarrow r$	$\rightarrow$ i 4-6
8.	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$	$\vee$ i 7	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$	$\vee$ i 7
9.	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$		$\vee$ e 2, 3-8	

(β) [18 μονάδες] $\exists x \neg \exists y\, [\, P(y) \wedge Q(y,x) \,] \vdash \forall x\, [\, P(x) \rightarrow \exists y \neg Q(x,y) \,]$

1.	$\exists x \neg \exists y\, [\, P(y) \wedge Q(y,x)]$	προϋπόθεση
2.	x_0	
3.	$P(x_0)$	πρ. υπόθεση
4.	$a \quad \neg \exists y\, [\, P(y) \wedge Q(y,a) \,]$	πρ. υπόθεση
5.	$Q(x_0,a)$	πρ. υπόθεση
6.	$P(x_0) \wedge Q(x_0,a)$	$\wedge$ i 3, 5
7.	$\exists y\, [\, P(y) \wedge Q(y,a) \,]$	$\exists y$ i 6
8.	$\perp$	$\neg$ e 4, 7
9.	$\neg Q(x_0,a)$	$\neg$ i 5-8
10.	$\exists y \neg Q(x_0,y)$	$\exists y$ i 9
11.	$\exists y \neg Q(x_0,y)$	$\exists y$ e 1, 4-9
12.	$P(x_0) \rightarrow \exists y \neg Q(x_0,y)$	$\rightarrow$ i 3-11
13.	$\forall x\, [\, P(x) \rightarrow \exists y \neg Q(x,y) \,]$	$\forall x$ i 2-12