Τμήμα Πληροφορικής
Άννα Φιλίππου

Ασκήσεις από παλιές εξετάσεις

Άσκηση 5 – Τελική 2010

Να αποφασίσετε κατά πόσο τα πιο κάτω λογικά επακόλουθα είναι ορθά. Αν ένα επακόλουθο είναι ορθό να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας το σχετικό σύστημα κανόνων, διαφορετικά, να δώσετε ερμηνεία στην οποία το επακόλουθο να είναι ψευδές.

(α) $\vdash (A \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow (\neg B \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg A))$

(β) $\vdash [\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))] \rightarrow [\neg \exists y\, (\neg Q(y) \wedge P(y))]$

(γ) $\forall x\, \exists y\, (P(x) \rightarrow Q(y)), \exists x\, \neg P(x) \vdash \exists y\, \neg Q(y)$

Άσκηση 4 – Τελική 2010

Να αποδείξετε με τη Μέθοδο της Επίλυσης ότι, αν μια δυαδική σχέση P είναι συμμετρική, μεταβατική και ολική, τότε είναι και αυτοπαθής. Με άλλα λόγια, να δείξετε ότι αν ισχύουν οι προτάσεις

$\forall x\, \forall y\, [P(x,y) \rightarrow P(y,x)]$,

$\forall x \forall y \forall z\, [(P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow P(x,z)]$ και

$\forall x\, \exists y\, \mathrm{P}(x,y)$

τότε ισχύει και η σχέση

$\forall x\, P(x,x)$.

Άσκηση 2 – Τελική 2011

(α) **[8 μονάδες]** Να διατυπώσετε τις πιο κάτω προτάσεις στον χρονικό λογισμό CTL.

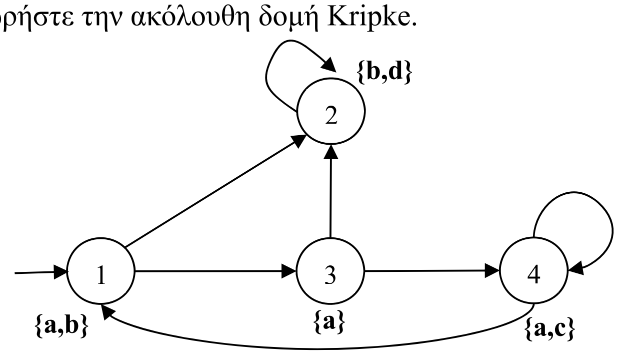
(i) Την επόμενη φορά που θα ισχύει το p θα ισχύει ταυτόχρονα και το q.

(ii) Μετά το p, αν αυτό εμφανιστεί, το q δεν εμφανίζεται ποτέ ξανά.

(iii) Ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο εμφανίσεις του p θα εμφανιστεί το q.

(iv) Το p θα εμφανιστεί ακριβώς μια φορά.

(β) **[7 μονάδες]** Θεωρήστε την ακόλουθη δομή Kripke.



Να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο μοντελοελέγχου της CTL για να ελέγξετε κατά πόσο η κατάσταση 1 της δομής ικανοποιεί την ιδιότητα που ακολουθεί.

$$\mathbf{AG}\ \mathbf{A}(\mathrm{a}\ \mathbf{U}\ \mathrm{b}) \rightarrow \mathbf{EG}\ \mathbf{EX}\ \mathbf{A}\ (\mathrm{a}\ \mathbf{U}\ \mathrm{d})$$

(γ) **[10 μονάδες]** Για κάθε ένα από τα πιο κάτω ζεύγη ιδιοτήτων να ελέγξετε κατά πόσο οι ιδιότητες που περιέχει είναι ισοδύναμες δίνοντας είτε απόδειξη της ισοδυναμίας είτε κάποιο αντιπαράδειγμα.

(i) $(\mathbf{F}\,\mathbf{G}\,p) \vee (\mathbf{F}\,\mathbf{G}\,q)$ και $\mathbf{F}\,(\mathbf{G}\,p \vee \mathbf{G}\,q)$

(ii) $\mathbf{G}\,p \wedge \mathbf{F}\,q$ και $(\mathbf{G}\,p) \wedge (p\,\mathbf{U}\,q)$

Άσκηση 3 – Τελική Εξέταση 2012

(α) **[12 μονάδες]** Να αποδείξετε την ορθότητα της προδιαγραφής $\models_{\mathrm{par}} \{\mathrm{true}\}\ \mathrm{P}\ \{\mathrm{v} = \mathrm{x} - \mathrm{y}\}$ όπου ο κώδικας του P δίνεται πιο κάτω.

```
v := 0;
z := 0;
while (z != y){
  z := z+1;
  v := v-1;
}
v := v+x;
```

(β) **[3 μονάδες]** Να εξηγήσετε γιατί η προδιαγραφή από το μέρος (α) δεν είναι ολικά ορθή επιδεικνύοντας συνθήκες κάτω από τις οποίες το πρόγραμμα P *δεν* τερματίζει.

(γ) **[7 μονάδες]** Να εντοπίσετε προσυνθήκη A για την οποία το πρόγραμμα τερματίζει και να αποδείξετε ότι η προσυνθήκη αυτή πράγματι εγγυάται τον ορθό τερματισμό του προγράμματος, δηλαδή, να αποδείξετε την προδιαγραφή $\models_{\mathrm{tot}} \{\mathrm{A}\}\ \mathrm{P}\ \{\mathrm{v} = \mathrm{x} - \mathrm{y}\}$.

Άσκηση 5 – Τελική Εξέταση 2012

Να αποφασίσετε κατά πόσο τα πιο κάτω λογικά επακόλουθα είναι ορθά. Αν ένα επακόλουθο είναι ορθό να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας το σχετικό σύστημα κανόνων, διαφορετικά να δώσετε ερμηνεία στην οποία το επακόλουθο να είναι ψευδές.

(α) $(p \vee q) \to (p \wedge q) \vdash (\neg p \vee \neg q) \to (\neg p \wedge \neg q)$
(β) $\forall x\,[P(x) \to (Q(x) \vee R(x))], \neg\exists x\,[\neg R(x) \wedge Q(x)] \vdash \forall x\,[(P(x) \vee Q(x)) \to R(x)]$
(γ) $\forall x \forall y\,[P(x,y) \to \neg P(y,x)],\ \neg P(a,b) \vdash P(b,a)$

Άσκηση 4 – Τελική Εξέταση 2013

Να αποδείξετε με τη Μέθοδο της Επίλυσης ότι, αν ισχύουν οι προτάσεις

$\forall x\,[\,\mathrm{S}(x) \to \exists y\,(\mathrm{T}(y) \wedge \mathrm{E}(x,y))\,]$

$\forall x\,[\,\mathrm{W}(x) \to \mathrm{S}(x)\,]$

$\mathrm{W(colin)} \wedge \mathrm{D(colin)}$

$\forall z\,[\,(\,\mathrm{T}(z) \wedge (\exists y(\mathrm{D}(y) \wedge \mathrm{E}(y,z)))\,) \to \mathrm{M}(z)\,]$

τότε ισχύει και η πρόταση

$\exists z\,[\,\mathrm{T}(z) \wedge \mathrm{M}(z)\,]$.

Άσκηση 2 – Τελική Εξέταση 2013

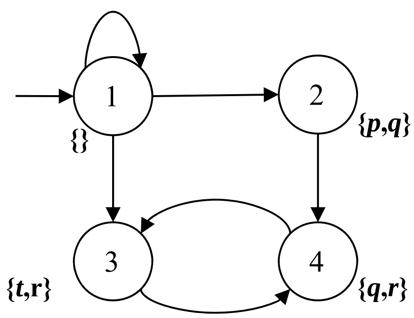
(α) **[8 μονάδες]** Να διατυπώσετε τις πιο κάτω προτάσεις στον χρονικό λογισμό CTL.

(i) Είναι δυνατόν να φτάσουμε σε μία κατάσταση όπου το p είναι αληθές και από την κατάσταση αυτή και μετά το q να είναι συνεχώς αληθές.

(ii) Δεν είναι ποτέ δυνατόν κάποια κατάσταση η οποία ικανοποιεί το p να έχει αμέσως επόμενη κατάσταση η οποία να ικανοποιεί το q.

(iii) Σε κάθε μονοπάτι η τιμή του p εναλλάσσεται ανάμεσα στις τιμές True και False σε διαδοχικές καταστάσεις.

(β) **[7 μονάδες]** Θεωρήστε την ακόλουθη δομή Kripke.



Να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο μοντελοελέγχου της CTL για να ελέγξετε κατά πόσο η κατάσταση 1 της δομής ικανοποιεί την ιδιότητα που ακολουθεί.

$$\mathbf{AG}\ \mathbf{EF}\ \mathrm{p} \;\rightarrow\; \mathbf{EF}\ \mathbf{A}\ (\mathrm{q}\ \mathbf{U}\ \mathrm{EX}\ \neg \mathrm{t}))$$

(γ) **[10 μονάδες]** Να αποφασίσετε ποια από τα πιο κάτω ζεύγη προτάσεων περιέχουν ισοδύναμες προτάσεις. Αν δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες να δώσετε απόδειξη χρησιμοποιώντας τη σημασιολογία, διαφορετικά να παρουσιάσετε δομή Kripke στην οποία να ικανοποιείται η μία ιδιότητα αλλά όχι η άλλη.

(i) $\mathbf{E}\,[\,(\varphi \wedge \psi)\ \mathbf{U}\ (\neg\varphi \wedge \psi)\,]$ και $\mathbf{E}\,[\,\psi\ \mathbf{U}\ (\neg\varphi \wedge \psi)\,]$

(ii) $\mathbf{AF}\ \varphi \rightarrow \mathbf{AG}\ \psi$ και $\mathbf{A}\,[\,\varphi\ \mathbf{U}\ (\psi \vee \neg\varphi)\,]$

Άσκηση 4 – Τελική Εξέταση 2014

(α) **[5 μονάδες]** Εξηγήστε πότε μια προδιαγραφή Hoare είναι ορθή υπό την έννοια της μερικής ορθότητας και πότε είναι ορθή υπό την έννοιας της ολικής ορθότητας και δώστε παραδείγματα που να επιδεικνύουν τη διαφορά ανάμεσα στις δύο έννοιες.

(β) **[10 μονάδες]** Να αποδείξετε την ορθότητα της προδιαγραφής $\models_{par}$ {true} P $\{sum = n\cdot(n-1)\}$ όπου ο κώδικας του P δίνεται πιο κάτω.

```
sum := 0;
i := 1;
while (i != n){
  sum := sum + 2*i;
  i := i+1;
```

(γ) **[2 μονάδες]** Να εξηγήσετε γιατί η προδιαγραφή από το μέρος (β) δεν είναι ολικά ορθή επιδεικνύοντας συνθήκες κάτω από τις οποίες το πρόγραμμα P *δεν* τερματίζει.

Άσκηση 2 – Τελική Εξέταση 2014

Να αποφασίσετε κατά πόσο τα πιο κάτω λογικά επακόλουθα είναι ορθά. Αν ένα επακόλουθο είναι ορθό να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας το σχετικό σύστημα κανόνων, διαφορετικά να δώσετε ερμηνεία στην οποία το επακόλουθο να είναι ψευδές.

(α) $\neg p \to (q \vee r), s \to (t \wedge u), t \to r, \neg r \vdash (p \to s) \to q$
(β) $\forall x\, [P(x) \to (Q(x) \vee R(x))], \neg\exists x\, [\neg R(x) \wedge Q(x)] \vdash \forall x\, [(P(x) \vee Q(x)) \to R(x)]$
(γ) $\forall x\, [\, P(x) \to P(f(x))\,] \vdash \forall x\, [\, x = f(x)\,]$