ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΠΛ 412: Λογική στην Πληροφορική

Ενδιάμεση Εξέταση – Σκελετοί Λύσεων

Ημερομηνία : Σάββατο, 27 Οκτωβρίου 2012
Διάρκεια : 11:00 – 13:00
Διδάσκουσα : Άννα Φιλίππου

<u>Άσκηση 1</u> [25 μονάδες]

Να αποδείξετε τα πιο κάτω λογικά επακόλουθα χρησιμοποιώντας τα συστήματα κανόνων του Προτασιακού Λογισμού (μέρος (α)) και του Κατηγορηματικού Λογισμού (μέρος (β)).

(α) ***[10 μονάδες]*** $p \vee q,\ p \vee r,\ q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

(Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον κανόνα LEM)

1.	$p \vee q$	προϋπόθεση		
2.	$p \vee r$	προϋπόθεση		
3.	$q \vee r$	προϋπόθεση		
4.	$p \vee \neg p$	LEM		
5.	p	υπόθεση		
6.	q	υπόθεση	r	υπόθεση
7.	$p \wedge q$	$\wedge$ i 5, 6	$p \wedge r$	$\wedge$ i 5, 6
8.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee$ i 7	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee$ i 7
9.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee$ e 3, 6-8		
10.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	$\vee$ i 9		
11.	$\neg p$	υπόθεση		
12.	p	υπόθεση	q	υπόθεση
13.	$\perp$	$\neg$ e 11, 12		
14.	q	$\perp$ e 13		
15.	q	$\vee$ e 1, 12-14		
16.	p	υπόθεση	r	υπόθεση
17.	$\perp$	$\neg$ e 11, 12		
18.	r	$\perp$ e 13		
19.	r	$\vee$ e 2, 16-18		
20.	$(q \wedge r)$	$\wedge$ i 15, 19		
21.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	$\vee$ i 20		
22.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	$\vee$ e 4 5-10, 11-21		

(β) ***[15 μονάδες]*** $\exists x\,[F(x) \wedge \forall y\,(S(y) \to R(x,y))] \vdash \forall x\,[S(x) \to \exists y\,(F(y) \wedge R(y,x))]$

1.	$\exists x\,[F(x) \wedge \forall y\,(S(y) \to R(x,y))]$	προϋπόθεση
2.	x_0	
3.	$S(x_0)$	υπόθεση
4.	a $F(a) \wedge \forall y\,(S(y) \to R(a,y))$	υπόθεση
5.	$F(a)$	$\wedge e_1$ 4
6.	$\forall y\,(S(y) \to R(a,y))$	$\wedge e_3$ 4
7.	$S(x_0) \to R(a, x_0)$	$\forall y$ e 6
8.	$R(a, x_0)$	MP 7, 3
9.	$F(a) \wedge R(a, x_0)$	$\wedge$ i 5, 8
10.	$\exists y\,(F(y) \wedge R(y,x_0))$	$\exists y$ i 9
11.	$\exists y\,(F(y) \wedge R(y,x_0))$	$\exists x$ e 1 4-10
12.	$S(x_0) \to \exists y\,(F(y) \wedge R(y,x_0))$	$\to$ i 3-11
13.	$\forall x\,[S(x) \to \exists y\,(F(y) \wedge R(y,x))]$	$\forall x$ 2-12

<u>Άσκηση 2</u> ***[25 μονάδες]***

Θεωρήστε το λογικό επακόλουθο

$$\exists x\,R(x,x),\ \forall x\,\forall y\,[(R(x,y) \wedge R(y,y)) \to x = y] \vdash \exists x\,\forall y\,(R(y,y) \to x = y)$$

(α) ***[6 μονάδες]*** *Η απόδειξη που ακολουθεί για το λογικό επακόλουθο είναι λανθασμένη. Να εντοπίσετε όλα τα σημεία της απόδειξης που περιέχουν λάθη και να εξηγήσετε σύντομα γιατί είναι λανθασμένα.*

1.	$\exists x\,R(x,x)$	προϋπόθεση
2.	a $R(a,a)$	υπόθεση
3.	$R(a,a) \wedge R(a,a)$	$\wedge$ i 2, 2
4.	$\forall x \forall y\,[(R(x,y) \wedge R(y,y)) \to x = y]$	προϋπόθεση
5.	$\forall y\,[(R(a,y) \wedge R(y,y)) \to a = y]$	$\forall x$ e 4
6.	$(R(a,a) \wedge R(a,a)) \to a = a$	$\forall y$ e 5
7.	$a = a$	MP 3, 6
8.	$R(a,a) \to a = a$	$\to$ i 2, 7
9.	$\forall y\,R(y,y) \to a = y$	$\forall y$ i 8
10.	$\exists x \forall y\,(R(y,y) \to x = y)$	$\exists x$ i 9
11.	$\exists x \forall y\,(R(y,y) \to x = y)$	$\exists x$ e 1 2-10

Λάθη υπάρχουν στις γραμμές 8 και 9.

Το λάθος στη γραμμή 8 οφείλεται στο γεγονός ότι, για να γίνει εισαγωγή συνεπαγωγής, πρέπει να υπάρξει κουτί που να ξεκινά υποθέτοντας τη συνθήκη της συνεπαγωγής και στο τέλος να προκύπτει το συμπέρασμα. Αυτό όμως δεν υλοποιείται κατά την εισαγωγή της συνεπαγωγής που δηλώνεται στη συγκεκριμένη γραμμή.

Το λάθος στη γραμμή 9 οφείλεται στο γεγονός ότι η εισαγωγή του καθολικού ποσοδείκτη βασίζεται στο γεγονός ότι η τιμή a ικανοποιεί την πρόταση $R(a, a) \to a = a$ (γραμμή 8). Εντούτοις, η τιμή a δεν είναι μια τυχαία μεταβλητή αλλά μια τιμή για την οποία υπάρχει συγκεκριμένη υπόθεση (γραμμή 2). Ως εκ τούτου δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η πρόταση της γραμμής 8 ισχύει για κάθε τιμή y όπως αναφέρεται λανθασμένα στη γραμμή 9.

(β) ***[5 μονάδες]*** *Να αποδείξετε με ακρίβεια ότι το λογικό επακόλουθο*

$$\exists x\, R(x,x),\ \forall x \forall y\, [(R(x, y) \wedge R(y, y)) \to x = y] \vdash \exists x \forall y\, (R(y,y) \to x = y)$$

είναι ψευδές.

Θα δείξουμε ότι

$$\exists x\, R(x,x),\ \forall x\forall y\, [(R(x, y) \wedge R(y, y)) \to x = y] \not\models \exists x\forall y\, (R(y,y) \to x = y) \qquad (*)$$

Τότε, από την ορθότητα του Κατηγορηματικού Λογισμού, το επακόλουθο είναι ψευδές. Για να δείξουμε το (*) πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει μοντέλο στο οποίο

$M \models \exists x\, R(x,x)$, $M \models \forall x\forall y\, [(R(x, y) \wedge R(y, y)) \to x = y]$ και

$M \not\models \exists x\forall y\, (R(y,y) \to x = y)$

Θεωρούμε το μοντέλο:

A = οι ακέραιοι

και $R(x, y)$ αν $x = y$.

Προφανώς για κάθε ακέραιο x έχουμε $R(x,x)$ και για κάθε x, y αν $x = y \wedge y = y$ τότε $x = y$. Από την άλλη όμως δεν ισχύει ότι υπάρχει x που να είναι ίσο με όλους τους ακέραιους.

(γ) ***[4 μονάδες]*** *Να δείξετε ότι η πρόταση*

$$[\exists x\, R(x,x) \wedge \forall x \forall y\, ((R(x, y) \wedge R(y, y)) \to x = y)\,] \to \exists x \forall y\, (R(y,y) \to x = y)$$

είναι ικανοποιήσιμη.

Θα πρέπει να δώσουμε μοντέλο στο οποίο η πρόταση να γίνεται αληθής.

<u>Λύση 1:</u> Τέτοιο μοντέλο μπορεί να είναι οποιοδήποτε μοντέλο M στο οποίο η συνθήκη της πρότασης παίρνει την τιμή False, δηλαδή

$$M \not\models \exists x\, R(x,x) \wedge \forall x\forall y\, ((R(x, y) \wedge R(y, y)) \to x = y)$$

Ένα τέτοιο μοντέλο είναι το εξής:

A = οι ακέραιοι

και $R(x, y)$ αν ο ακέραιος x διαιρεί τον ακέραιο y.

Αν και κάθε ακέραιος διαιρεί τον εαυτό του ($M \models \exists x\, R(x,x)$) υπάρχουν ακέραιοι που έχουν διαιρέτες διάφορους από τον εαυτό τους ($M \models \forall x\cancel{\forall} y\, ((R(x, y) \wedge R(y, y)) \to x = y)$). Κατά συνέπεια

$$M \not\models \exists x\, R(x,x) \wedge \forall x\forall y\, ((R(x, y) \wedge R(y, y)) \to x = y)$$

και

$$M \models [\exists x\, R(x,x) \wedge \forall x\forall y\, ((R(x, y) \wedge R(y, y)) \to x = y)\,] \to \exists x\forall y\, (R(y,y) \to x = y)$$

<u>Λύση 2:</u>

A = {1,2,3}

R = {(1,1), (1,2), (3,3)}

*(δ) **[10 μονάδες]** Να αποδείξετε ότι ισχύει η πιο κάτω σημασιολογική συνεπαγωγή χρησιμοποιώντας τη σημασιολογία του Κατηγορηματικού Λογισμού (Αλήθεια του Tarski):*

$$P(a) \wedge Q(c),\ \forall x\,(P(x) \rightarrow R(x,a)) \models \exists y\, R(y,y) \vee \neg\exists z\, Q(z)$$

Πρέπει να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε μοντέλο M, αν

$$M \models P(a) \wedge Q(c),\ M \models \forall x\,(P(x) \rightarrow R(x,a))$$

τότε

$$M \models \exists y\, R(y,y) \vee \neg\exists z\, Q(z)$$

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα μοντέλο M έχουμε

$$M \models P(a) \wedge Q(c) \qquad (1)$$

και

$$M \models \forall x\,(P(x) \rightarrow R(x,a)) \qquad (2)$$

Τότε από το (1) και σύμφωνα με την Αλήθεια του Tarski, ισχύει ότι

$$M \models P(a) \qquad (3)$$

Επιπλέον, από το (2) έχουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του σύμπαντος, έστω b,

$$M \models P(b) \rightarrow R(b,a)$$

Αφού όμως η πρόταση ισχύει για οποιαδήποτε τιμή b, θα πρέπει να ισχύει και για την τιμή a:

$$M \models P(a) \rightarrow R(a,a) \qquad (4)$$

Επομένως, από (3) και (4) παίρνουμε

$$M \models R(a,a)$$

που συνεπάγεται ότι

$$M \models \exists y\, R(y,y)$$

και από τη σημασιολογία του τελεστή της διάζευξης

$$M \models \exists y\, R(y,y) \vee \neg\exists z\, Q(z)$$

που είναι και το ζητούμενο.

<u>Άσκηση 3</u> [25 μονάδες]

*(α) **[10 μονάδες]** Να μετατρέψετε τις πιο κάτω προτάσεις σε προτασιακή μορφή επιδεικνύοντας τα ενδιάμεσα στάδια της εργασίας σας.*

(i) $\forall y\, [((\forall x\, P(x,y)) \rightarrow Q(y,z)) \wedge \exists w \forall x\, \neg(R(x,w) \vee Q(x,y))]$

$\forall y\, [((\forall x\, P(x,y)) \rightarrow Q(y,z)) \wedge \exists w \forall x\, \neg(R(x,w) \vee Q(x,y))]$

$\equiv \forall y\, [(\neg\forall x\, P(x,y) \vee Q(y,z)) \wedge \exists w \forall x\, \neg(R(x,w) \wedge \neg Q(x,y))]$

$\equiv \forall y\, [(\exists x\, \neg P(x,y) \vee Q(y,z)) \wedge \exists w \forall x\, (\neg R(x,w) \wedge \neg Q(x,y))]$

$\equiv \forall y\, [(\exists x\, \neg P(x,y) \vee Q(y,z)) \wedge \exists w \forall z\, (\neg R(z,w) \wedge \neg Q(z,y))]$

$\equiv \forall y \exists x\, [(\neg P(x,y) \vee Q(y,z)) \wedge \exists w \forall z\, (\neg R(z,w) \wedge \neg Q(z,y))]$

$\equiv \forall y \exists x \exists w \forall z\, [(\neg P(x,y) \vee Q(y,z)) \wedge (\neg R(z,w) \wedge \neg Q(z,y))]$

Εφαρμογή Μεθόδου Skolem:

$(\neg P(f(y),y) \vee Q(y,z)) \wedge \neg R(z,g(y)) \wedge \neg Q(z,y)$

Προτασιακό σύνολο:

$\{\{\neg P(f(y),y), Q(y,z)\}, \{\neg R(z,g(y))\}, \{\neg Q(z,y)\})$

(ii) $\neg[\forall x\ \exists y\ P(x,y) \rightarrow \exists x\ \exists y\ R(x,y)] \vee \forall x\ (\neg\exists y\ Q(x,y))$

$\neg[\forall x\ \exists y\ P(x,y) \rightarrow \exists x\ \exists y\ R(x,y)] \vee \forall x\ (\neg\exists y\ Q(x,y))$

$\equiv \neg[\neg\forall x\ \exists y\ P(x,y) \vee \exists x\ \exists y\ R(x,y)] \vee \forall x\ (\neg\exists y\ Q(x,y))$

$\equiv [\forall x \exists y\ P(x,y) \wedge \neg\exists x\ \exists y\ R(x,y)] \vee \forall x\ (\forall y\ \neg Q(x,y))$

$\equiv [\forall x \exists y\ P(x,y) \wedge \forall x\ \forall y\ \neg R(x,y)] \vee \forall x \forall y\ \neg Q(x,y)$

$\equiv [\forall x_1 \exists y_1\ P(x_1,y_1) \wedge \forall x_2 \forall y_2\ \neg R(x_2,y_2)] \vee \forall x_3 \forall y_3\ \neg Q(x_3,y_3)$

$\equiv \forall x_1 \exists y_1\ [P(x_1,y_1) \wedge \forall x_2 \forall y_2\ \neg R(x_2,y_2)] \vee \forall x_3 \forall y_3\ \neg Q(x_3,y_3)$

$\equiv \forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \forall y_2\ [P(x_1,y_1) \wedge \neg R(x_2,y_2)] \vee \forall x_3 \forall y_3\ \neg Q(x_3,y_3)$

$\equiv \forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \forall y_2\ \forall x_3 \forall y_3\ [[P(x_1,y_1) \wedge \neg R(x_2,y_2)] \vee \neg Q(x_3,y_3)]$

$\equiv \forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \forall y_2\ \forall x_3 \forall y_3\ [(P(x_1,y_1) \vee \neg Q(x_3,y_3)) \wedge (\neg R(x_2,y_2) \vee \neg Q(x_3,y_3))]$

Εφαρμογή Μεθόδου Skolem:

$(P(x_1,f(x_1)) \vee \neg Q(x_3,y_3)) \wedge (\neg R(x_2,y_2) \vee \neg Q(x_3,y_3))$

Προτασιακό σύνολο:

$\{\{P(x_1,f(x_1)), \neg Q(x_3,y_3)\}, \{\neg R(x_2,y_2), \neg Q(x_3,y_3)\}\}$

(β) ***[15 μονάδες]*** *Να αποδείξετε με τη Μέθοδο της Επίλυσης ότι αν ισχύουν οι προτάσεις*

$\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\ (p(x,y) \wedge\ p(y,z)) \rightarrow p(x,z)\ ]$

$\forall x\ \forall y\ [\ p(x,y) \rightarrow\ p(y,x)\ ]$

τότε ισχύει και το πιο κάτω συμπέρασμα:

$\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\ (p(x,y) \wedge\ p(z,y)) \rightarrow p(x,z)\ ]$

Μετατροπή σε Κανονική Μορφή Prenex:

1. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\ (p(x,y) \wedge\ p(y,z)) \rightarrow p(x,z)\ ] \equiv \forall x\ \forall y\ \forall z\ [\ \neg p(x,y) \vee \neg\ p(y,z) \vee p(x,z)\ ]$
2. $\forall x\ \forall y\ [\ p(x,y) \rightarrow\ p(y,x)\ ] \equiv \forall x\ \forall y\ [\ \neg p(x,y) \vee\ p(y,x)\ ]$
3. $\neg\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\ (p(x,y) \wedge\ p(z,y)) \rightarrow p(x,z)\ ]$ (Άρνηση Συμπεράσματος)
   $\equiv \exists x\ \exists y\ \exists z\ \neg[\ \neg(p(x,y) \wedge\ p(z,y)) \vee p(x,z)\ ]$
   $\equiv \exists x\ \exists y\ \exists z\ [\ (p(x,y) \wedge\ p(z,y)) \wedge \neg\ p(x,z)\ ]$

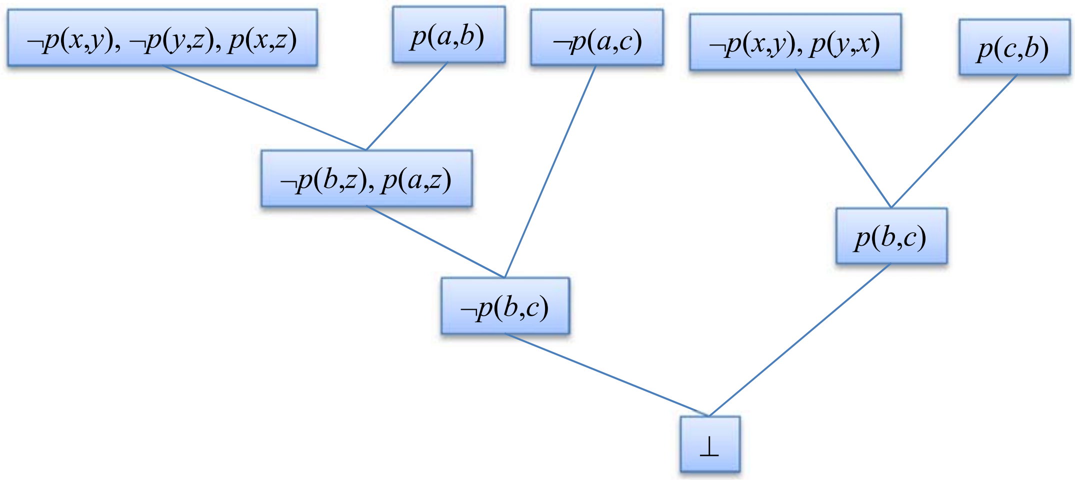
Εφαρμογή Μεθόδου Skolem:

1. $\neg p(x,y) \vee \neg p(y,z) \vee p(x,z)$
2. $\neg p(x,y) \vee\ p(y,x)$
3. $p(a,b) \wedge\ p(c,b) \wedge \neg\ p(a,c)$

Προτασιακά σύνολα:

1. $\{\{\neg p(x,y), \neg p(y,z), p(x,z)\}\}$
2. $\{\{\neg p(x,y), p(y,x)\}\}$
3. $\{\{p(a,b)\}, \{p(c,b)\}, \{\neg p(a,c)\}\}$

Εφαρμογή της Μεθόδου Επίλυσης:



<u>Άσκηση 4</u> [25 μονάδες]

Θεωρήστε το πιο κάτω πρόγραμμα λογικού προγραμματισμού (οι γραμμές εμφανίζονται αριθμημένες).

```
1.    προαπ(ΕΠΛ131,ΕΠΛ132)
2.    προαπ(ΕΠΛ132,ΕΠΛ231)
3.    προαπ(ΕΠΛ111,ΕΠΛ231)
4.    προαπ(ΕΠΛ111,ΕΠΛ211)
5.    προαπ(ΕΠΛ231,ΕΠΛ342)
6.    προαπ(ΕΠΛ231,ΕΠΛ323)
7.    προαπ(ΕΠΛ211,ΕΠΛ323)

8.    αλυσίδα(x, x, [x])
9.    αλυσίδα(x, y, x:xs) ← προαπ(x,w), αλυσίδα(w,y,xs)

10.   ← αλυσίδα(ΕΠΛ111, ΕΠΛ342, [X,Y,Z])
```

Η βάση δεδομένων ‘`προαπ`’ *περιγράφει τη σχέση προαπαιτούμενων που υπάρχει ανάμεσα σε ένα σύνολο από μαθήματα (π.χ. Το μάθημα ΕΠΛ131 είναι προαπαιτούμενο για το ΕΠΛ132), ενώ η διαδικασία* ‘`αλυσίδα`’ *είναι σε θέση να υπολογίσει αλυσίδες ανάμεσα σε μαθήματα.*

Για παράδειγμα, ισχύει ότι `αλυσίδα(ΕΠΛ131,ΕΠΛ231,[ΕΠΛ131,ΕΠΛ132,ΕΠΛ231])` *αφού η λίστα [ΕΠΛ131,ΕΠΛ132,ΕΠΛ231] αποτελεί αλυσίδα μαθημάτων ανάμεσα στα μαθήματα ΕΠΛ131 και ΕΠΛ231.*

(Υπενθύμιση: Αν $xs = [x_1,\ldots,x_n]$*, τότε γράφουμε* $x_0{:}xs$ *για τη λίστα* $[x_0,x_1,\ldots,x_n]$*. Για παράδειγμα,* $a{:}[b,c] = [a,b,c]$ *και* $c{:}[] = [c]$*.)*

(α) ***[10 μονάδες]*** *Να εφαρμόσετε τη μέθοδο της SLD-επίλυσης για να φτάσετε σε διάψευση του στόχου που βρίσκεται στη γραμμή 10 του προγράμματος.*

1. προαπ(ΕΠΛ131,ΕΠΛ132)
2. προαπ(ΕΠΛ132,ΕΠΛ231)
3. προαπ(ΕΠΛ111,ΕΠΛ231)
4. προαπ(ΕΠΛ111,ΕΠΛ211)
5. προαπ(ΕΠΛ231,ΕΠΛ342)
6. προαπ(ΕΠΛ231,ΕΠΛ323)
7. προαπ(ΕΠΛ211,ΕΠΛ323)

8. αλυσίδα(x, x, [x])
9. αλυσίδα(x, y, x:xs) ← προαπ(x,w), αλυσίδα(w,y,xs)

10. ← αλυσίδα(ΕΠΛ111, ΕΠΛ342, [X,Y,Z])

11. ← προαπ(ΕΠΛ111,w), αλυσίδα(w, ΕΠΛ342, [Y,Z]) — από (9) και (10)
x↦ΕΠΛ111, y↦ΕΠΛ342, X↦ΕΠΛ111, xs ↦[Y,Z]
12. ← αλυσίδα(ΕΠΛ231, ΕΠΛ342, [Y,Z]) — από (3) και (11) , w↦ΕΠΛ231
13. ← προαπ(ΕΠΛ231,w), αλυσίδα(w, ΕΠΛ342, [Z]) — από (9) και (12)
x↦ΕΠΛ231, y↦ΕΠΛ342, Y↦ΕΠΛ231, xs ↦[Z]
14. ← αλυσίδα(ΕΠΛ342, ΕΠΛ342, [Z]) — από (5) και (13) , w↦ΕΠΛ342
15. ⊥ — από (8) και (14) , x↦ΕΠΛ342, Z↦ ΕΠΛ342

(β) ***[3 μονάδες]*** *Ποια αντικατάσταση ορθής απάντησης προέκυψε κατά την εκτέλεση του προγράμματος στο μέρος (α);*

X↦ΕΠΛ111 Y↦ΕΠΛ231 Z↦ΕΠΛ342

(*γ)* ***[12 μονάδες]*** *Θεωρήστε τώρα την πιο κάτω παραλλαγή του προγράμματος από το μέρος (α).*

```
1.    προαπ(ΕΠΛ131,ΕΠΛ132)
2.    προαπ(ΕΠΛ132,ΕΠΛ231)
3.    προαπ(ΕΠΛ111,ΕΠΛ231)
4.    προαπ(ΕΠΛ111,ΕΠΛ211)
5.    προαπ(ΕΠΛ231,ΕΠΛ342)
6.    προαπ(ΕΠΛ231,ΕΠΛ323)
7.    προαπ(ΕΠΛ211,ΕΠΛ323)

8.    αλυσίδα(x, x, [x])
9.    αλυσίδα(x, y, x:xs) ← προαπ(x,w), αλυσίδα(w,y,xs)

10.   ← αλυσίδα(ΕΠΛ111, ΕΠΛ323, Z)
```

Να παρουσιάσετε εκτελέσεις του προγράμματος οι οποίες να επιδεικνύουν κάθε ένα από τα πιο κάτω φαινόμενα:

(1) Διαφορετικές εκτελέσεις ενός προγράμματος δυνατόν να εμφανίσουν διαφορετικές διαψεύσεις/αντικαταστάσεις ορθής απάντησης για τον στόχο του προγράμματος.

Εκτέλεση 1:

10. ← αλυσίδα(ΕΠΛ111, ΕΠΛ323, Z)
11. ← προαπ(ΕΠΛ111,w), αλυσίδα(w, ΕΠΛ323, xs) από (9) και (10)
x↦ΕΠΛ111, y↦ΕΠΛ323, Z↦ ΕΠΛ111:xs
12. ← αλυσίδα(ΕΠΛ231, ΕΠΛ323, xs) από (3) και (11), w↦ΕΠΛ231
13. ← προαπ(ΕΠΛ231,w'), αλυσίδα(w', ΕΠΛ323, xs') από (9) και (12)
x′ ↦ΕΠΛ231, y′ ↦ΕΠΛ323, xs↦ ΕΠΛ231:xs'
14. ← αλυσίδα(ΕΠΛ323, ΕΠΛ323, xs') από (6) και (13) , w′ ↦ΕΠΛ323
15. ⊥ από (8) και (14) , x↦ΕΠΛ323, xs'↦[ΕΠΛ323]

Αντικατάσταση ορθής απάντησης:

Z ↦ ΕΠΛ111: xs = ΕΠΛ111:επλ231:xs' = ΕΠΛ111: ΕΠΛ231:[ΕΠΛ323]

Εκτέλεση 2:

10. ← αλυσίδα(ΕΠΛ111, ΕΠΛ323, Z)

11. ← προαπ(ΕΠΛ111,w), αλυσίδα(w, ΕΠΛ323, xs) από (9) και (10)
x↦ΕΠΛ111, y↦ΕΠΛ323, Z↦ ΕΠΛ111:xs
12. ← αλυσίδα(ΕΠΛ211, ΕΠΛ323, xs) από (4) και (11) , w↦ΕΠΛ211
13. ← προαπ(ΕΠΛ211,w'), αλυσίδα(w', ΕΠΛ323, xs') από (9) και (12)
x′ ↦ΕΠΛ211, y′ ↦ΕΠΛ323, xs↦ ΕΠΛ211:xs'
14. ← αλυσίδα(ΕΠΛ323, ΕΠΛ323, xs') από (7) και (13) , w'↦ΕΠΛ323
15. ⊥ από (8) και (14) , x↦ΕΠΛ323, xs'↦[ΕΠΛ323]

Αντικατάσταση ορθής απάντησης:

Z ↦ ΕΠΛ111: xs = ΕΠΛ111: ΕΠΛ211:xs' = ΕΠΛ111: ΕΠΛ211:[ΕΠΛ323]

(2) Δυνατόν να υπάρχουν εκτελέσεις οι οποίες αποτυγχάνουν να τερματίσουν ακόμη και αν υπάρχει διάψευση.

Μη τερματισμός μπορεί να εμφανιστεί αν επιλέγουμε συνεχώς να συνδυάζουμε τη γραμμή 9 του προγράμματος με τον αντίστοιχο όρο από τον στόχο:

10. ← αλυσίδα(ΕΠΛ111, ΕΠΛ323, Z)

11. ← προαπ(ΕΠΛ111,w), αλυσίδα(w, ΕΠΛ323, xs) από (9) και (10)
x↦ΕΠΛ111, y↦ΕΠΛ323, Z↦ ΕΠΛ111:xs
12. ← προαπ(ΕΠΛ111,w), προαπ(w,w'), αλυσίδα(w', ΕΠΛ323, xs') από (9) και (11)
x′ ↦w, y'↦ΕΠΛ323, xs↦w:xs'
13. ← προαπ(ΕΠΛ111,w), προαπ(w,w'), προαπ(w',w'') , αλυσίδα(w'', ΕΠΛ323, xs'')
από (9) και (12), x″ ↦w', y''↦ΕΠΛ323, xs′ ↦w':xs''
14. …