Ασκήσεις Επανάληψης – Λύσεις

Άσκηση 1

(α) Το επακόλουθο $\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to C) \to (A \to B))$ είναι ψευδές. Αυτό φαίνεται στην ανάθεση τιμών [A] = T, [B] = F, [C] = T.

(β) Ακολουθεί η απόδειξη του επακόλουθου.

1.	$\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$	Υπόθεση
2.	$\forall x\, Q(x)$	Υπόθεση
3.	x_0	
4.	$P(x_0) \to \neg Q(x_0)$	$\forall x$ e 1
5.	$Q(x_0)$	$\forall x$ e 2
6.	$P(x_0)$	Υπόθεση
7.	$\neg Q(x_0)$	$\to$e 4, 6
8.	$\bot$	$\bot$i 5, 7
9.	$\neg P(x_0)$	$\neg$i 6-8
10.	$\forall x\, \neg P(x)$	$\forall x$ i 3-9
11.	$(\forall x\, Q(x)) \to (\forall x\, \neg P(x))$	$\to$i 2-10
12.	$(\forall x(P(x) \to \neg Q(x))) \to ((\forall x\, Q(x)) \to (\forall x\, \neg P(x)))$	$\to$i 1-11

(γ) Ακολουθεί η απόδειξη του επακόλουθου.

1.	$\forall x(P(x) \to R(x))$	Προϋπόθεση
2.	$\neg\exists x(\neg R(x) \wedge Q(x))$	Προϋπόθεση
3.	x_0	
4.	$Q(x_0)$	Υπόθεση
5.	$\neg R(x_0)$	Υπόθεση
6.	$Q(x_0) \wedge \neg R(x_0)$	$\wedge$i 4, 5
7.	$\exists x(\neg R(x) \wedge Q(x))$	$\exists x$ i 6
8.	$\bot$	$\bot$i 2, 7
9.	$\neg\neg R(x_0)$	$\bot$e 5-8
10.	$R(x_0)$	$\neg\neg$e 9
11.	$Q(x_0) \to R(x_0)$	$\to$i 4-10
12.	$P(x_0) \vee Q(x_0) \to R(x_0)$	$\vee$ i 11
13.	$\forall x(P(x) \vee Q(x) \to R(x))$	$\forall x$ i 3-12

(δ) Ακολουθεί η απόδειξη του επακόλουθου.

1.	$\exists x\,(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$	προϋπόθεση
2.	x_0	
3.	$\neg P(x_0) \wedge \neg Q(x_0)$	Υπόθεση
4.	$\neg P(x_0)$	$\wedge$e 3
5.	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	Υπόθεση
6.	$P(x_0)$	$\wedge$e 5
7.	$\bot$	$\bot$ i 4, 6
8.	$\neg(P(x_0) \wedge Q(x_0))$	$\bot$e 7
9.	$\exists x\,(\neg\,(P(x) \wedge Q(x)))$	$\exists x$ i 8
10.	$\exists x\,(\neg\,(P(x) \wedge Q(x)))$	$\exists x$ e 1, 2-9

Άσκηση 2

Επιλέγουμε ως Α το σύνολο των ακεραίων και $g^M(a,a') = a - a'$. Επίσης, θέτουμε ως $Q(x,y,z)$ το κατηγόρημα $(z = x*y)$. Επομένως, η πρόταση $\phi = \forall x\ \forall y\ Q(g(x, y), g(y, y), z)$ εκφράζει ότι $(x\text{-}y)*(y\text{-}y) = z$ δηλαδή, $0 = z$. Αυτό σημαίνει πως αν επιλέξουμε $l(z) = 0$ η πρόταση είναι αληθής, ενώ για οποιαδήποτε απονομή με $l(z) \neq 0$ η πρόταση είναι ψευδής.

Άσκηση 3

Χρησιμοποιούμε τα κατηγορήματα $\Pi(x,y)$ και $T(x)$ τα οποία ερμηνεύουμε ως «ο κύβος x βρίσκεται πάνω από τον κύβο y» και «ο κύβος x βρίσκεται πάνω στο τραπέζι». Οι προτάσεις μεταφράζονται στον Κατηγορηματικό λογισμό ως εξής.

1. Αν ένας κύβος βρίσκεται πάνω σε κάποιο άλλο κύβο, τότε δεν βρίσκεται πάνω στο τραπέζι.
   $\forall x \exists y\,(\Pi(x,y) \rightarrow \neg T(x))$
2. Κάθε κύβος βρίσκεται είτε πάνω στο τραπέζι είτε πάνω σε κάποιο άλλο κύβο.
   $\forall x\,(T(x) \vee \exists y\,\Pi(x,y))$
3. Κανένας κύβος δεν βρίσκεται πάνω σε κάποιο κύβο ο οποίος βρίσκεται επίσης πάνω σε κάποιο κύβο.
   $\forall x\,\neg(\exists y\,\Pi(x,y) \wedge \exists z\,\Pi(y,z))$
4. Αν κάποιος κύβος βρίσκεται πάνω σε κάποιο άλλο κύβο τότε ο δεύτερος κύβος βρίσκεται πάνω στο τραπέζι.
   $\forall x\,(\exists y\,\Pi(x,y) \rightarrow T(y))$

Για να ελέγξουμε την εγκυρότητα του συλλογισμού θα κτίσουμε την προτασιακή μορφή των πρώτων τριών προτάσεων και της άρνησης της τέταρτης πρότασης και θα εφαρμόσουμε σε αυτές τη μέθοδο της επίλυσης.

1. $\forall x \exists y\,(\Pi(x,y) \rightarrow \neg T(x)) = \forall x \exists y\,(\neg\Pi(x,y) \vee \neg T(x)) \Rightarrow \forall x\,(\neg\Pi(x,f(x)) \vee \neg T(x))$
2. $\forall x\,(T(x) \vee \exists y\,\Pi(x,y)) = \forall x \exists y\,(T(x) \vee \Pi(x,y)) \Rightarrow \forall x(T(x) \vee \Pi(x,g(x)))$
3. $\forall x\,\neg(\exists y\,\Pi(x,y) \wedge \exists z\,\Pi(y,z)) = \forall x\,\forall y\,\neg[\Pi(x,y) \wedge \exists z\,\Pi(y,z)]$
   $= \forall x\,\forall y\,[\neg\Pi(x,y) \vee \neg\exists z\,\Pi(y,z)]$
   $= \forall x\,\forall y\,[\neg\Pi(x,y) \vee \forall z\,\neg\Pi(y,z)]$
   $= \forall x\,\forall y\,\forall z\,[\neg\Pi(x,y) \vee \neg\Pi(y,z)]$

4. $\neg\forall x\,(\exists y\, \Pi(x,y) \rightarrow T(y)) = \neg\forall x\ (\exists y\, \neg\Pi(x,y) \vee T(y))$
$= \exists x\, \neg(\exists y\, \neg\Pi(x,y) \vee T(y))$
$= \exists x\, (\forall y\, \neg\neg\Pi(x,y) \wedge \neg T(y))$
$= \forall y\, \Pi(a,y) \wedge \neg T(y)$

Η προτασιακή μορφή των προτάσεων είναι η

$\{\neg\Pi(x, f(x)), \neg T(x)\}, \{T(x), \Pi(x, g(x))\}, \{\neg\Pi(x, y), \neg\Pi(y, z)\}, \{\Pi(a,y)\}, \{\neg T(y)\}$

και με τη Μέθοδο της Επίλυσης εντοπίζουμε αντίφαση ως εξής.

$\{\neg\Pi(x, f(x)), \neg T(x)\}$ $\{T(x), \Pi(x, g(x))\}$ $\{\neg\Pi(x, y), \neg\Pi(y, z)\}$ $\{\Pi(a,y)\}$ $\{\neg T(y)\}$

$\{\neg\Pi(y,z)\}$

$\{T(y)\}$

$\perp$

Άσκηση 4

(α) FX p $\leftrightarrow$ XF p (LTL)

Θα δείξουμε ότι η πρόταση είναι ταυτολογία.

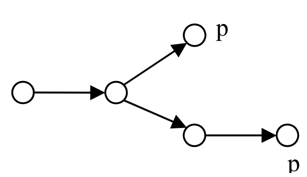
Έστω δομή Kripke M. Έχουμε ότι M |= FX p αν και μόνο αν κάθε μονοπάτι w που ξεκινά από το s είναι τέτοιο ώστε w |= FX p.

w |= FX p	αν και μόνο αν	$\exists j \geq 0$ τέτοιο ώστε	w^j |= X p
	αν και μόνο αν	$\exists j \geq 0$ τέτοιο ώστε	$(w^j)^1$ |= p
	αν και μόνο αν	$\exists j \geq 0$ τέτοιο ώστε	w^{j+1} |= p
	αν και μόνο αν	$\exists j \geq 0$ τέτοιο ώστε	$(w^1)^j$ |= p
	αν και μόνο αν	w^1 |= F p	
	αν και μόνο αν	w |= XF p	

Επομένως M |= XF p.

(β) AF AX p $\leftrightarrow$ AX AF p (CTL)

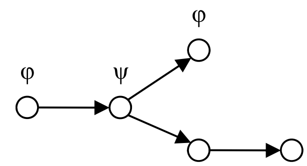
Η πρόταση δεν είναι ταυτολογία όπως φαίνεται στο πιο κάτω αντιπαράδειγμα.



Η δομή αυτή ικανοποιεί την ιδιότητα AX AF p αλλά όχι την AF AX p.

(γ) EG ($\phi \vee \psi$) $\leftrightarrow$ EG $\phi \vee$ EG ψ (CTL)

Η πρόταση δεν είναι ταυτολογία όπως φαίνεται στο πιο κάτω αντιπαράδειγμα



Η δομή αυτή ικανοποιεί την ιδιότητα EG $(\phi \vee \psi)$ αλλά όχι την EG $\phi \vee$ EG ψ .

(δ) AG $\phi \wedge$ AG $\psi \quad \leftrightarrow \quad$ AG $(\phi \wedge \psi)$ (CTL)

Θα αποδείξουμε ότι πρόταση αυτή είναι ταυτολογία.

Έστω δομή Kripke M και κατάσταση s. Τότε, αν M,s |=AG $\phi \wedge$ AG ψ, ισχύει ότι M, s |= AG ϕ και M, s |= AG ψ. Επομένως για κάθε μονοπάτι w που ξεκινά από την s και κάθε j ≥ 0, M,w[j] |≡ ϕ και M,w[j] |≡ ψ. Αυτό συνεπάγεται ότι M,w[j] |≡ $\phi\wedge\psi$ και επομένως M,s |= AG $(\phi\wedge\psi)$. Παρόμοια, αν M,s |= AG $(\phi\wedge\psi)$ ισχύει και ότι M,s |= AG $\phi \wedge$ AG ψ και το ζητούμενο έπεται.

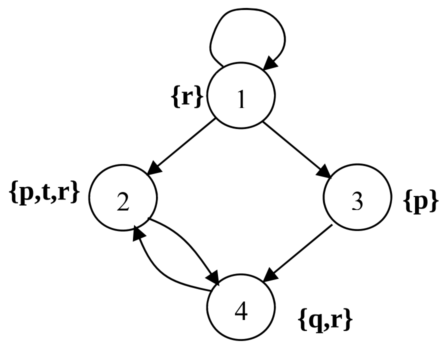
<u>Άσκηση 5</u>

Κτίζοντας πίνακα που δείχνει τις τιμές των a και y κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του βρόχου φθάνουμε στο συμπέρασμα ότι η αμετάβλητη συνθήκη του είναι η y = x!/a!. Ενδυναμώνουμε την αμετάβλητη συνθήκη με τον περιορισμό a ≥ 0 έτσι ώστε να έχουμε ότι η αμετάβλητη συνθήκη και η άρνηση του φρουρού μας δίνουν την μετασυνθήκη της προδιαγραφής. Η μεταβλητή έκφραση είναι η a. Η απόδειξη έχει ως εξής.

$\{x \geq 0\}$	
$\{1 = a!/a! \wedge x \geq 0\}$	Συνεπαγωγή
`a := x;`	
$\{1 = x!/a! \wedge a \geq 0\}$	Αξ. Ανάθεσης
`y := 1;`	
$\{y = x!/a! \wedge a \geq 0\}$	Αξ. Ανάθεσης
`while (a > 0){`	
$\{y = x!/a! \wedge a \geq 0 \wedge a > 0 \wedge 0 \leq a = E_0\}$	Αμ. Συνθήκη, Φρουρός και Μετ. Έκφραση
$\{y*a = x!/(a-1)! \wedge a - 1 \geq 0 \wedge 0 \leq a - 1 < E_0\}$	Συνεπαγωγή
`y := y*a;`	
$\{y = x!/(a-1)! \wedge a - 1 \geq 0 \wedge 0 \leq a - 1 < E_0\}$	Αξ. Ανάθεσης
`a := a-1;`	
$\{y = x!/a! \wedge a \geq 0 \wedge 0 \leq a < E_0\}$	Αξ. Ανάθεσης
`}`	
$\{y = x!/a! \wedge a \geq 0 \wedge \neg a > 0\}$	Κανόνας while
$\{y = x!\}$	Συνεπαγωγή

<u>Άσκηση 6</u>

α) Θεωρήστε την ακόλουθη δομή Kripke.



(i) $\neg$ p $\rightarrow$ r
Ικανοποιείται στις καταστάσεις 2 και 3 (αφού εκεί ισχύει η p) καθώς και στις 1 και 4 (αφού εκεί $\neg$p).

(ii) $\neg$ **EG** r
Ικανοποιείται μόνο στην 3 αφού αυτή είναι η μόνη κατάσταση από την οποία δεν υπάρχει μονοπάτι που να ικανοποιεί καθολικά την r.

(iii) **E** (t **U** q)
Ικανοποιείται στην 4 αφού αμέσως ισχύει η q καθώς και στην 2 αφού εδώ ικανοποιείται η t και μετά από ένα βήμα η q.

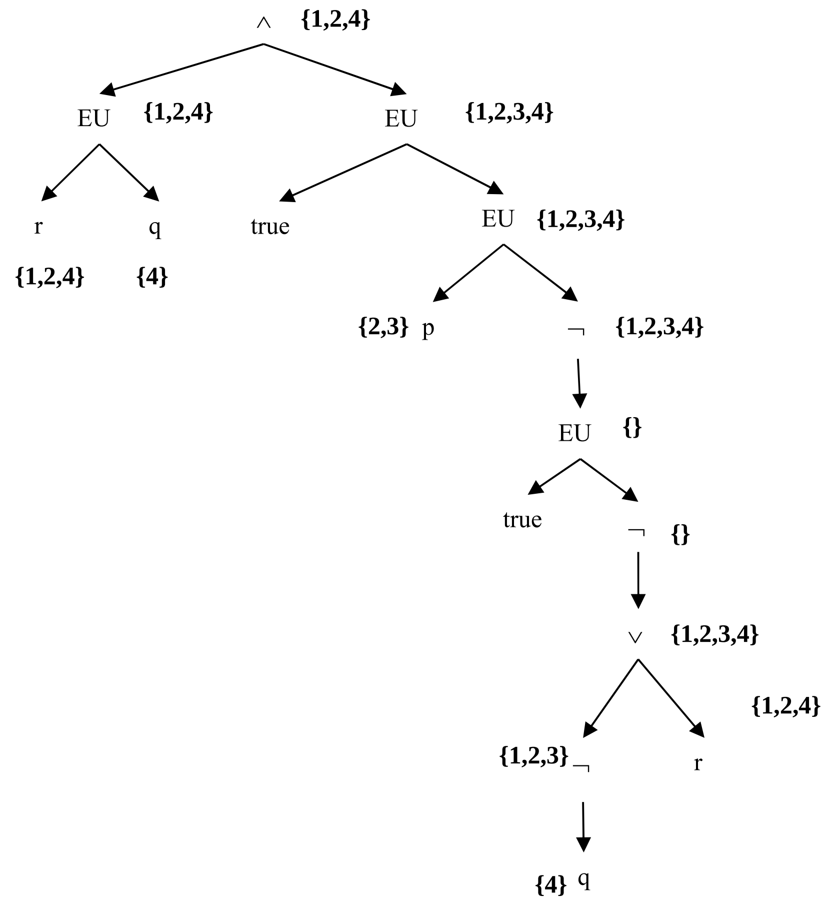
(iv) **AF** q
Ικανοποιείται στην 4 αφού αμέσως ισχύει η q καθώς και στις 2 και 3 αφού από εδώ είναι αναπόφευκτη η μετάβαση στη 4.

(v) **EF E**(p **U EG** (q $\rightarrow$ r))
H (q $\rightarrow$ r) ικανοποιείται στις 1-4.
H **EG** (q $\rightarrow$ r) ικανοποιείται και πάλι στις 1-4.
H **E**(p **U EG** (q $\rightarrow$ r)) ικανοποιείται και πάλι στις 1-4 και τέλος
H **EF E**(p **U EG** (q $\rightarrow$ r)) ικανοποιείται στις 1-4.

(β) Κατ' αρχή επεξεργαζόμαστε την ιδιότητα για να την φέρουμε στη ζητούμενη μορφή.

E(r U q) $\wedge$ EF E(p U AG (q $\rightarrow$ r)) = E(r U q) $\wedge$ E (true U E(p U AG (q $\rightarrow$ r)))
= E(r U q) $\wedge$ E (true U E(p U $\neg$EF $\neg$ (q $\rightarrow$ r)))
= E(r U q) $\wedge$ E (true U E(p U $\neg$EF $\neg$($\neg$q $\vee$ r))
= E(r U q) $\wedge$ E[true U E(p U $\neg$E [true U $\neg$($\neg$q $\vee$ r)])]

Στο πιο κάτω σχήμα θεωρούμε το δένδρο που αντιστοιχεί στην ιδιότητα και το σύνολο Sat(ϕ) για κάθε υποιδιότητά της.



Άσκηση 7

(α) Κανένα πιρούνι δεν χρησιμοποιείται ποτέ από περισσότερους από ένα φιλόσοφους.

$AG\ [\neg (l_1 \wedge r_3) \wedge \neg (l_2 \wedge r_1) \wedge \neg (l_3 \wedge r_2)]$

(β) Ο φιλόσοφος 2 θα φάει τουλάχιστον μια φορά.

$AF\ (eat_2)$

(γ) Αν κάποιος φιλόσοφος πεινάσει στο μέλλον θα φάει.

$AG\ [\ (hungry_1 \rightarrow AF\ eat_1) \wedge (hungry_2 \rightarrow AF\ eat_2) \wedge (hungry_3 \rightarrow AF\ eat_3)\ ]$

(δ) Ο φιλόσοφος 1 θα φάει ακριβώς μια φορά.

$A\ [\neg eat_1\ \ U\ \ [eat_1 \wedge A\ (eat_1\ U\ (\neg eat_1 \wedge AG\ \neg eat_1\ ))\ ]]$

(ε) Αν κάποιος φιλόσοφος κρατάει το πιρούνι στα αριστερά του τότε δεν θα το αφήσει παρά μόνο όταν φάει.

$AG\ [\ \wedge_{i \in \{1,2,3\}} (l_i \rightarrow A\ (l_i\ U\ eat_i))\ ]$

(ζ) Ένας φιλόσοφος σκέφτεται μόνο όταν δεν κρατάει κανένα πιρούνι.

$AG\ [\ \wedge_{i \in \{1,2,3\}} (think_i \rightarrow (\neg l_i \wedge \neg r_i)\ ]$

(η) Ανάμεσα σε οποιαδήποτε δύο γεύματα του φιλόσοφου 2 θα πρέπει να γευματίσει και ο φιλόσοφος 3.

$AG\ [\ eat_2 \rightarrow A(eat_2\ U\ (\neg eat_2 \wedge A(\neg eat_2\ U\ eat_3)\ )\ )\ ]$