

Φροντιστήριο 1 – Λύσεις Ασκήσεων

Άσκηση 2

(α) $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$

- | | |
|---------------------------|-----------------|
| 1. p | προϋπόθεση |
| 2. $\neg\neg(q \wedge r)$ | προϋπόθεση |
| 3. $\neg\neg p$ | \neg_i 1 |
| 4. $q \wedge r$ | \neg_e 2 |
| 5. r | \wedge_e 4 |
| 6. $\neg\neg p \wedge r$ | \wedge_i 3, 5 |

(β) $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1. $q \rightarrow r$	προσωρινή υπόθεση
2. $\neg q \rightarrow \neg p$	προσωρινή υπόθεση
3. p	προσωρινή υπόθεση
4. $\neg\neg p$	$\neg\neg_i$ 3
5. $\neg\neg q$	MT 2, 4
6. q	$\neg\neg_e$ 5
7. r	MP 1, 6
8. $p \rightarrow r$	\rightarrow_i 3-7
9. $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	\rightarrow_i 2-8
10. $(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	\rightarrow_i 1-9

(γ) $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1.	$p \wedge (q \vee r)$	προϋπόθεση
2.	p	$\wedge_e 1$
3.	$q \vee r$	$\wedge_e 1$
4.	q	προσωρινή υπόθεση
5.	$p \wedge q$	$\wedge_i 2, 4$
6.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i 5$
7.	r	προσωρινή υπόθεση
8.	$p \wedge r$	$\wedge_i 2, 7$
9.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_i 8$
10.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee_e 3, 4-6, 7-9$

(δ) $\neg(\neg p \vee q) \vdash p$

1.	$\neg(\neg p \vee q)$	προϋπόθεση
2.	$\neg p$	προσωρινή υπόθεση
3.	$\neg p \vee q$	$\vee_i 2$
4.	\perp	$\neg_e 1, 3$
5.	$\neg\neg p$	$\neg_i 2-4$
6.	p	$\neg\neg_e 5$

(ε) $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$

1.	$p \rightarrow q$	προϋπόθεση
2.	$p \vee \neg p$	LEM
3.	p	προσωρινή υπόθεση
4.	q	MP 1, 3
5.	$\neg p \vee q$	$\vee_i 4$
6.	$\neg p$	προσωρινή υπόθεση
7.	$\neg p \vee q$	$\vee_i 6$
8.	$\neg p \vee q$	$\vee_e 2, 3-5, 6-7$

(ζ)

1. $p \rightarrow (\neg p \vee r)$ προϋπόθεση

2. $\neg r$ προϋπόθεση

3. $\neg q$ προσωρινή υπόθεση

4. p προσωρινή υπόθεση

5. $\neg p \vee r$ MP

6. $\neg p$ προσωρινή υπόθεση

r προσωρινή υπόθεση

7. \perp \perp_i 4, 6

8. r \perp_e

9. r \vee_e 5, 8, 6

10. \perp \perp_i 2, 9

11. $\neg p$ \neg_i

12. $\neg q \rightarrow \neg r$ \rightarrow_i 3-11