Φροντιστήριο 11 – Λύσεις Ασκήσεων

Άσκηση 1

Παρατηρούμε ότι η αμετάβλητη συνθήκη του βρόχου είναι η “y = x – a” και μεταβλητή έκφραση η “a”. Βάσει αυτού, η απόδειξη έχει ως εξής:

$\{x \geq 0\}$	
$\{0 = x - x \wedge x \geq 0\}$	Συνεπαγωγή
`a := x;`	
$\{0 = x - a \wedge a \geq 0\}$	Αξίωμα Ανάθεσης
`y := 0;`	
$\{y = x - a \wedge a \geq 0\}$	Αξίωμα Ανάθεσης
`while (a != 0){`	
$\{y = x - a \wedge a \neq 0 \wedge 0 \leq a = E_0\}$	Αμ. συνθήκη, Μετ. Εκφρ. και Φρουρός
$\{y + 1 = x - a + 1 \wedge 0 \leq a - 1 < E_0\}$	Συνεπαγωγή
`y := y+1;`	
$\{y = x - a + 1 \wedge 0 \leq a - 1 < E_0\}$	Αξίωμα Ανάθεσης
`a := a-1;`	
$\{y = x - a \wedge 0 \leq a < E_0\}$	Αξίωμα Ανάθεσης
`}`	
$\{y = x - a \wedge \neg\neg a = 0\}$	Κανόνας total-while
$\{x = y\}$	Συνεπαγωγή

Άσκηση 2

Μεταβλητή έκφραση του προγράμματος είναι η x – y ενώ αμετάβλητη συνθήκη είναι απλά η πρόταση True. Η απόδειξη έχει ως εξής.

$\{x \geq 0\}$	
$\{True \wedge 0 \leq x - 0\}$	Συνεπαγωγή
`y := 0;`	
$\{True \wedge 0 \leq x - y\}$	Αξίωμα Ανάθεσης
`while (y != x){`	
$\{True \wedge \neg\, y = x \wedge 0 \leq x - y \leq E_0\}$	Φρουρός, Μετ. έκφρ. και Αμ. Συνθήκη
$\{True \wedge 0 \leq x - (y + 1) < E_0\}$	Συνεπαγωγή
`y := y+1;`	
$\{True \wedge 0 \leq x - y < E_0\}$	Αξίωμα Ανάθεσης
`}`	
$\{True \wedge \neg\, y \mathrel{!=} x\}$	Κανόνας total-while
$\{y = x\}$	Συνεπαγωγή

Ας υποθέσουμε ότι η συνθήκη του while loop μετατρέπεται σε x<y. Τότε η απόδειξη θα είχε ως εξής:

Μεταβλητή έκφραση του προγράμματος είναι και πάλι η x – y ενώ αμετάβλητη συνθήκη είναι η πρόταση $y \leq x$. Η απόδειξη έχει ως εξής.

$\{x \geq 0\}$

$\{ 0 \leq x \wedge 0 \leq x - 0\}$ Συνεπαγωγή

```
    y := 0;
```

$\{ y \leq x \wedge 0 \leq x - y\}$ Αξίωμα Ανάθεσης

```
    while (y < x){
```

$\{ y \leq x \wedge y < x \wedge 0 \leq x - y \leq E_0\}$ Φρουρός, Μετ. έκφρ. και Αμ. Συνθήκη

$\{ y+1 \leq x \wedge 0 \leq x - (y + 1) < E_0\}$ Συνεπαγωγή

```
        y := y+1;
```

$\{ y \leq x \wedge 0 \leq x - y < E_0\}$ Αξίωμα Ανάθεσης

```
    }
```

$\{y \leq x \wedge \neg\, y < x\}$ Κανόνας total-while

$\{y = x\}$ Συνεπαγωγή

Επομένως, η προσυνθήκη $\{x \geq 0\}$ είναι και πάλι απαραίτητη για την ορθότητα του προγράμματος.

Σημειώνεται ότι αν και το πρόγραμμα τερματίζει ακόμα και για x<0, η προδιαγραφή {true} Copy2 {y=x} δεν είναι αληθής, αφού για x<0 το πρόγραμμα δεν παράγει το επιθυμητό αποτέλεσμα {y = x} όπως απαιτείται στη μετασυνθήκη.

Άσκηση 3

Θα αποδείξουμε την ολική ορθότητα της προδιαγραφής χρησιμοποιώντας ως αμετάβλητη συνθήκη και μεταβλητή έκφραση τις πιο κάτω:

η = “$\forall j,\ 0 \leq j < i,\ A[k] \leq A[j] \wedge i \leq n$”

E = “$n - i$”

$\{n>0\}$

$\{\forall j,\ 0 \leq j < 1,\ A[0] \leq A[j] \wedge 0 \leq n - 1 \}$ Συνεπαγωγή

```
k := 0;
```

$\{\forall j,\ 0 \leq j < 1,\ A[k] \leq A[j] \wedge 0 \leq n - 1 \}$ Αξ. Ανάθεσης

```
i := 1;
```

$\{\forall j,\ 0 \leq j < i,\ A[k] \leq A[j] \wedge 0 \leq n - i \}$ Αξ. Ανάθεσης

```
while (i < n){
```

$\{\forall j,\ 0 \leq j < i,\ A[k] \leq A[j] \wedge i \leq n \wedge i < n \wedge 0 \leq n - i = E_0\}$

Αμ. Συνθήκη, Φρουρός και Μετ. Έκφραση

$\{(A[i]<A[k]) \rightarrow \forall j,\ 0 \leq j < i+1, A[i] \leq A[j] \wedge i + 1 \leq n \wedge 0 \leq n - i - 1< E_0)$

$\wedge\{(A[i]\geq A[k]) \rightarrow \forall j,\ 0 \leq j < i+1,\ A[k] \leq A[j] \wedge i + 1 \leq n \wedge 0 \leq n - i - 1< E_0)\}$

Συνεπαγωγή

```
        if  (A[i] < A[k])
```

$\{\forall j,\ 0 \le j < i{+}1\ ,\ A[i] \le A[j] \wedge i + 1 \le n \wedge 0 \le n - i - 1 < E_0\}$

```
            k = i;
```

$\{\forall j,\ 0 \le j < i{+}1\ ,\ A[k] \le A[j] \wedge i + 1 \le n \wedge 0 \le n - i - 1 < E_0\}$ Αξ. Ανάθεσης

$\{\forall j,\ 0 \le j < i{+}1\ ,\ A[k] \le A[j] \wedge i{+}1 \le n \wedge 0 \le n - i - 1 < E_0\}$ Κανόνας if

```
        i := i+1;
```

$\{\forall j,\ 0 \le j < i\ ,\ A[k] \le A[j] \wedge i \le n \wedge 0 \le n - i < E_0\}$ Καν. Ανάθεσης

```
    }
```

$\{\forall j,\ 0 \le j < i,\ A[k] \le A[j] \wedge i \le n \wedge i \ge n\}$ Κανόνας total-while

$\{\forall j,\ 0 \le j < i,\ A[k] \le A[j] \wedge i = n\}$ Συνεπαγωγή

$\{\forall j,\ 0 \le j < n,\ A[k] \le A[j]\}$ Συνεπαγωγή