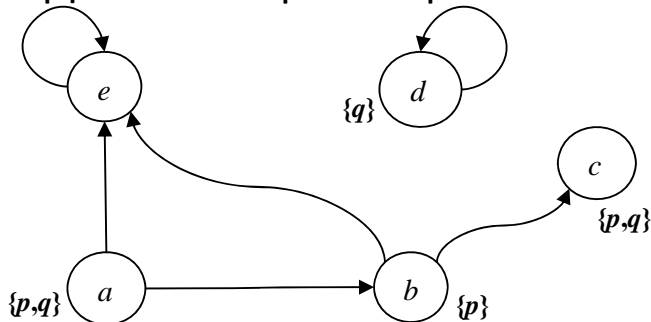


Φροντιστήριο 12 – Λύσεις Ασκήσεων

Άσκηση 1

Θεωρήστε το πιο κάτω μοντέλο Kripke.



(α) Να αποφασίσετε κατά πόσο το μοντέλο ικανοποιεί τα πιο κάτω επεξηγώντας τις απαντήσεις σας.

- | | |
|--------------------------------|---------------------------|
| i. $a \Vdash \Box \Box q$ | iv. $c \Vdash \Diamond T$ |
| ii. $a \Vdash \Box \Diamond q$ | v. $c \Vdash \Box F$ |
| iii. $d \Vdash \Diamond T$ | vi. $d \Vdash \Box F$ |

Λύση

- i. Για να ικανοποιείται η ιδιότητα πρέπει για κάθε κατάσταση x , $(a,x) \in R$ να ισχύει $x \Vdash \Box q$. Υπάρχουν δύο τέτοιες καταστάσεις, οι e και b . Καμιά από αυτές όμως δεν ικανοποιεί την ιδιότητα $\Box q$, επομένως η σχέση δεν ικανοποιείται.
- ii. Για να ικανοποιείται η ιδιότητα πρέπει για κάθε κατάσταση x , $(a,x) \in R$ να ισχύει $x \Vdash \Box \Diamond q$. Υπάρχουν δύο τέτοιες καταστάσεις, οι e και b . Η κατάσταση e όμως δεν ικανοποιεί την ιδιότητα $\Box \Diamond q$, επομένως η σχέση δεν ικανοποιείται.
- iii. Για να ικανοποιείται η ιδιότητα πρέπει να υπάρχει κατάσταση x , $(d,x) \in R$ τέτοια ώστε $x \Vdash T$. Αφού $(d,d) \in R$ και $d \Vdash T$, η σχέση ικανοποιείται.
- iv. Για να ικανοποιείται η ιδιότητα πρέπει να υπάρχει κατάσταση x , $(c,x) \in R$ τέτοια ώστε $x \Vdash T$. Αφού όμως δεν υπάρχει καμιά κατάσταση x , $(c,x) \in R$, η σχέση δεν ικανοποιείται.
- v. Για να ικανοποιείται η ιδιότητα πρέπει για κάθε κατάσταση x , $(c,x) \in R$ να ισχύει $x \Vdash \Box F$. Αφού όμως δεν υπάρχει καμιά κατάσταση x , $(c,x) \in R$, η σχέση ικανοποιείται τετριμμένα.
- vi. Για να ικανοποιείται η ιδιότητα πρέπει για κάθε κατάσταση x , $(d,x) \in R$ να ισχύει $x \Vdash \Box F$. Αφού $(d,d) \in R$ και όχι $d \Vdash \Box F$, η σχέση δεν ικανοποιείται.

(β) Να βρείτε τις καταστάσεις του μοντέλου που να ικανοποιούν κάθε μια από τις πιο κάτω ιδιότητες.

- | | |
|--|--|
| i. $\Box \neg p \wedge \Box \Box \neg p$ | iv. $\Box p \vee \Box \neg p$ |
| ii. $\Diamond p \vee \Diamond q$ | v. $\Box(p \vee \Box p)$ |
| iii. $\Diamond(p \vee \Diamond q)$ | vi. $\Box(\Box p \rightarrow \Box q) \vee \Box \Box q$ |

Λύση

Η λύση για όλα τα σκέλη παρουσιάζεται στον πιο κάτω πίνακα.

	$\Box\neg p \wedge \Box\neg p$	$\Diamond p \vee \Diamond q$	$\Diamond(p \vee \Diamond q)$	$\Box p \vee \Box\neg p$	$\Box(p \vee \Box p)$	$\Box(\Box p \rightarrow \Box q) \vee \Box\Box q$
a	False	True	True	False	False	True
b	False	True	True	False	False	True
c	True	False	False	True	True	True
d	True	True	True	True	False	True
e	True	False	False	True	False	True

Άσκηση 2

Να αποφασίσετε ποιες από τις πιο κάτω ιδιότητες του βασικού Τροπικού Λογισμού είναι ισοδύναμες μεταξύ τους, αποδεικνύοντας τις απαντήσεις σας.

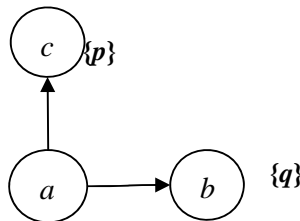
(α) $\Diamond(p \wedge q)$ και $\Diamond p \wedge \Diamond q$

(β) $\Box(p \wedge q)$ και $\Box p \wedge \Box q$

Λύση

(α) Η σχέση $\Diamond(p \wedge q)$ εκφράζει ότι σε κάποιο επόμενο κόσμο ικανοποιείται η ιδιότητα $p \wedge q$, ενώ η σχέση $\Diamond p \wedge \Diamond q$ ότι σε κάποιο επόμενο κόσμο ικανοποιείται η p και σε κάποιο επόμενο κόσμο η q . Οι ιδιότητες δεν είναι ισοδύναμες αφού οι κόσμοι στους οποίους ικανοποιείται η p και η q στη δεύτερη πρόταση δεν είναι αναγκαίο να είναι οι ίδιοι, σε αντίθεση με την πρώτη πρόταση.

Ακολουθεί μοντέλο Kripke το οποίο επιδεικνύει αυτή τη διαφορά. Συγκεκριμένα, αν και το μοντέλο ικανοποιεί τη δεύτερη πρόταση δεν ικανοποιεί την πρώτη πρόταση στην κατάσταση a .



(β) Η πρόταση είναι αληθής. Η απόδειξη έχει ως εξής:

Έστω κόσμος w σε κάποιο μοντέλο Kripke M . Τότε

$w \Vdash \Box(p \wedge q)$ αν και μόνο αν $x \Vdash p \wedge q$ για κάθε $(w,x) \in R$
 αν και μόνο αν $x \Vdash p$ και $x \Vdash q$ για κάθε $(w,x) \in R$
 αν και μόνο αν $x \Vdash p$ για κάθε (w,x) και $x \Vdash q$ για κάθε $(w,x) \in R$
 αν και μόνο αν $w \Vdash \Box p$ και $w \Vdash \Box q$
 αν και μόνο αν $w \Vdash \Box p \wedge \Box q$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Άσκηση 3

Να αποδείξετε τα πιο κάτω λογικά επακόλουθα του Τροπικού Λογισμού KT45.

(α) $\vdash p \rightarrow \Box \Diamond p$

(β) $\vdash \Box \Diamond \Box p \rightarrow \Diamond p$

(γ) $\vdash \Box(p \rightarrow q) \wedge \Box(q \rightarrow r) \rightarrow \Box(p \rightarrow r)$

Λύση

(α) Θα χρησιμοποιήσουμε την ισοδυναμία $\Diamond p \equiv \neg \Box \neg p$ και θα αποδείξουμε ότι $\vdash p \rightarrow \Box \neg \Box \neg p$.

1.	p	προϋπόθεση
2.	$\Box \neg p$	πρ. υπόθεση
3.	$\neg p$	T 2
4.	\perp	$\neg e$ 1,3
5.	$\neg \Box \neg p$	$\neg i$ 2-4
6.	$\Box \neg \Box \neg p$	Αξίωμα 5, 5
7.	$p \rightarrow \Box \neg \Box \neg p$	$\rightarrow i$ 2-6

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε την ισοδυναμία $\Diamond p \equiv \neg \Box \neg p$ και θα αποδείξουμε ότι $\vdash \Box \neg \Box \neg \Box p \rightarrow \Box p$.

1.	$\Box \neg \Box \neg \Box p$	προϋπόθεση
2.	$\neg \Box \neg \Box p$	$\Box e$ 1
3.	$\neg \Box p$	πρ. υπόθεση
4.	$\Box \neg \Box p$	Αξίωμα 5, 3
5.	\perp	$\neg e$ 4,2
6.	$\neg \neg \Box p$	$\neg i$ 3-5
7.	$\Box p$	$\neg \neg e$ 6
8.	$\Box \neg \Box \neg \Box p \rightarrow \Box p$	$\rightarrow i$ 2-7

(γ)

1.	$\Box(p \rightarrow q) \wedge \Box(q \rightarrow r)$	προϋπόθεση
2.	$\Box(p \rightarrow q)$	$\wedge e$ 1
3.	$\Box(q \rightarrow r)$	$\wedge e$ 1
4.	p	προσωρινή υπόθεση
5.	$p \rightarrow q$	$\Box e$ 2
6.	q	$\rightarrow e$ 5, 4
7.	$q \rightarrow r$	$\Box e$ 3
8.	r	$\rightarrow e$ 7, 6
9.	$p \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 5-8
10.	$\Box(p \rightarrow r)$	$\Box i$ 4-9
11.	$\Box(p \rightarrow q) \wedge \Box(q \rightarrow r) \rightarrow \Box(p \rightarrow r)$	$\rightarrow i$ 5-11