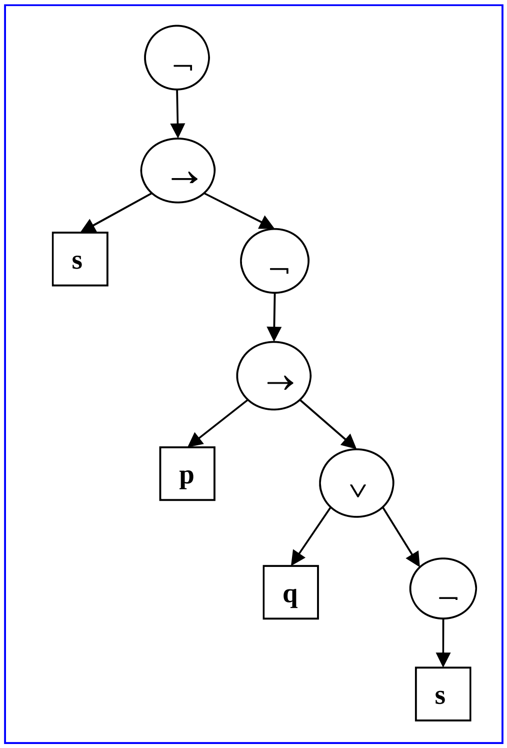
Φροντιστήριο 2 – Λύσεις Ασκήσεων

Άσκηση 1

Το δένδρο που αντιστοιχεί στην πρόταση $\phi = \neg(s \to (\neg(p \to (q \vee \neg s))))$ καθώς και ο πίνακας αλήθειας της φαίνονται πιο κάτω.



s	p	q	¬s	q∨¬s	p→(q∨¬s)	(¬(p→(q∨¬s))	s→(¬(p→(q∨¬s))))	ϕ
T	T	T	F	T	T	F	F	T
T	T	F	F	F	F	T	T	F
T	F	T	F	T	T	F	F	T
T	F	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	F	T	F
F	T	F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	T	F	T	F
F	F	F	T	T	T	F	T	F

Άσκηση 2

(α) $\neg \phi_1 \wedge \neg \phi_2 \vdash \phi_1 \to \phi_2$

1.	$\neg \phi_1 \wedge \neg \phi_2$	προϋπόθεση
2.	$\neg \phi_1$	$\wedge_e$
3.	ϕ_1	προσωρινή υπόθεση
4.	$\perp$	$\perp_i$ 2, 3
5.	ϕ_2	$\perp_e$
6.	$\phi_1 \to \phi_2$	$\to_i$ 3-5

(β) $\phi_1 \wedge \neg \phi_2 \vdash \neg(\phi_1 \to \phi_2)$

1.	$\phi_1 \wedge \neg \phi_2$	προϋπόθεση
2.	$\phi_1 \to \phi_2$	προσωρινή υπόθεση
3.	ϕ_1	$\wedge_e$ 1
4.	$\neg\phi_2$	$\wedge_e$ 1
5.	$\neg\phi_1$	MT 2, 4
6.	$\perp$	$\perp_i$ 3, 5
7.	$\neg(\phi_1 \to \phi_2)$	$\neg_i$ 2-6

(γ) $\neg \phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \phi_1 \to \phi_2$

1.	$\neg\phi_1 \wedge \phi_2$	προϋπόθεση
2.	ϕ_1	προσωρινή υπόθεση
3.	$\neg\phi_1$	$\wedge_e$ 1
4.	$\perp$	$\perp_i$ 2, 3
5.	ϕ_2	$\perp_e$ 4
6.	$\phi_1 \to \phi_2$	$\to_i$ 2-5

(δ) $\phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \phi_1 \to \phi_2$

1.	$\phi_1 \wedge \phi_2$	προϋπόθεση
2.	ϕ_1	προσωρινή υπόθεση
3.	ϕ_2	$\wedge_e$ 1
4.	$\phi_1 \to \phi_2$	$\to_i$ 2-3

Άσκηση 3

Γνωρίζουμε ότι δύο προτάσεις ϕ και ψ είναι σημασιολογικά ισοδύναμες αν $\phi \models \psi$ και $\psi \models \phi$. Αυτό συνεπάγεται ότι δυο σημασιολογικά ισοδύναμες προτάσεις είναι αληθείς για ακριβώς τις ίδιες αναθέσεις τιμών των ατομικών προτάσεων που περιέχουν.

Στην προκειμένη περίπτωση, ισοδύναμη προς τη δοθείσα πρόταση είναι η πρόταση (α) και μπορούμε να το δούμε φτιάχνοντας τους πίνακες αλήθειας. Για τις άλλες τρεις προτάσεις παρατηρούμε ότι η αρχική πρόταση δεν προϋποθέτει την αλήθεια καμίας από τις p, q και $\neg$q.

Άσκηση 4

(1) Για να δείξουμε ότι το σύνολο τελεστών $\{\neg, \rightarrow\}$ είναι επαρκές αρκεί να δείξουμε ότι οι τελεστές $\vee$ και $\wedge$ μπορούν να αντικατασταθούν μέσω ισοδύναμων προτάσεων που χρησιμοποιούν μόνο τελεστές από το σύνολο. Οι ζητούμενες ισοδυναμίες είναι οι

$$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$$
$$p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) = \neg(p \rightarrow \neg q)$$

Επαλήθευση των ισοδυναμιών μπορεί να γίνει μέσω πινάκων αλήθειας και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Για να δείξουμε ότι το σύνολο τελεστών $\{\rightarrow, \perp\}$ είναι επαρκές αρκεί να δείξουμε ότι οι τελεστές $\neg$, $\vee$ και $\wedge$ μπορούν να αντικατασταθούν μέσω ισοδύναμων προτάσεων που χρησιμοποιούν μόνο τελεστές από το σύνολο. Οι ζητούμενες ισοδυναμίες είναι οι

$$\neg p \equiv p \rightarrow \perp$$
$$p \vee q \equiv (p \rightarrow \perp) \rightarrow q$$
$$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q) \equiv \neg\,(p \rightarrow (q \rightarrow \perp)) \equiv (p \rightarrow (q \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp$$

Όπως και πριν, επαλήθευση των ισοδυναμιών μπορεί να γίνει εύκολα μέσω πινάκων αλήθειας.

(2) Θα αποδείξουμε ότι είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε τον τελεστή $\neg$ χρησιμοποιώντας τους τελεστές $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι οποιαδήποτε πρόταση ϕ που περιέχει μια ατομική πρόταση p και τους τελεστές $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ είναι τέτοια ώστε αν $[[p]] = T$ τότε $[[\phi]] = T$. Επομένως $\phi \neq \neg p$. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στον αριθμό των τελεστών της πρότασης ϕ.

- Αν ο αριθμός των τελεστών της ϕ είναι 0, τότε $\phi = p$ και προφανώς $\phi \neq \neg p$.
- Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάθε πρόταση με λιγότερους από k τελεστές.
- Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση ϕ έχει ακριβώς k τελεστές. Υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις.
  - $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$. Ισχύει ότι οι προτάσεις ϕ_1 και ϕ_2 έχουν λιγότερους από k τελεστές, επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής, για $[[p]] = T$, $[[\phi_1]] = T$ και $[[\phi_2]] = T$. Συνεπώς, $[[\phi]] = T \vee T = T$.

- $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$. Ισχύει ότι οι προτάσεις ϕ_1 και ϕ_2 έχουν λιγότερους από k τελεστές, επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής, για $[[p]] = T$, $[[\phi_1]] = T$ και $[[\phi_2]] = T$. Συνεπώς, $[[\phi]] = T \wedge T = T$.
- $\phi = \phi_1 \rightarrow \phi_2$. Ισχύει ότι οι προτάσεις ϕ_1 και ϕ_2 έχουν λιγότερους από k τελεστές, επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής, για $[[p]] = T$, $[[\phi_1]] = T$ και $[[\phi_2]] = T$. Συνεπώς, $[[\phi]] = T \rightarrow T = T$.

Το ζητούμενο έπεται.

(3) Όχι, το σύνολο $\{\neg, \leftrightarrow\}$ δεν είναι επαρκές σύνολο τελεστών. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο πίνακας αλήθειας οποιασδήποτε πρότασης φ με δύο ατομικές προτάσεις p και q, περιέχει άρτιο αριθμό γραμμών με την τιμή T και άρτιο αριθμό γραμμών με την τιμή F. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στον αριθμό των τελεστών της πρότασης φ και αφήνεται στον αναγνώστη.