Φροντιστήριο 3 – Λύσεις Ασκήσεων

Άσκηση 1

Λαμβάνουμε το αποτέλεσμα συνδυάζοντας τις γραμμές του πίνακα όπου η πρόταση παίρνει την τιμή F.

p	q	r	φ
T	T	T	**T**
T	T	F	**F**
T	F	T	**F**
T	F	F	**F**
F	T	T	**T**
F	T	F	**F**
F	F	T	**T**
F	F	F	**F**

$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$

Άσκηση 2

(α) $\neg(p \to (\neg(q \wedge (\neg p \to q)))) = \neg(p \to (\neg(q \wedge (\neg\neg p \vee q))))$

$= \neg(p \to (\neg(q \wedge (\neg\neg p \vee q))))$

$= \neg(\neg p \vee (\neg(q \wedge (\neg\neg p \vee q))))$

$= \neg\neg p \wedge \neg(\neg(q \wedge (\neg\neg p \vee q)))$

$= p \wedge (q \wedge (p \vee q)))$

$= p \wedge (q \vee p) \wedge q$

(β) $(p_1 \wedge q_1) \vee (p_2 \wedge q_2) \vee (p_3 \wedge q_3) = (((p_1 \wedge q_1) \vee p_2) \wedge ((p_1 \wedge q_1) \vee q_2)) \vee (p_3 \wedge q_3)$

$= ((p_1 \vee p_2) \wedge (q_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee q_2) \wedge (q_1 \vee q_2)) \vee (p_3 \wedge q_3)$

$= \varphi_1 \vee (p_3 \wedge q_3)$ *όπου* $\varphi_1 = (p_1 \vee p_2) \wedge (q_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee q_2) \wedge (q_1 \vee q_2)$

$= (\varphi_1 \vee p_3) \wedge (\varphi_1 \vee q_3)$

$\varphi_1 \vee p_3 = ((p_1 \vee p_2) \wedge (q_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee q_2) \wedge (q_1 \vee q_2)) \vee p_3$

$= (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (q_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee q_2 \vee p_3) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee p_3)$

$\varphi_1 \vee q_3 = ((p_1 \vee p_2) \wedge (q_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee q_2) \wedge (q_1 \vee q_2)) \vee q_3$

$= (p_1 \vee p_2 \vee q_3) \wedge (q_1 \vee p_2 \vee q_3) \wedge (p_1 \vee q_2 \vee q_3) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee q_3)$

Τελική απάντηση:

$(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (q_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee q_2 \vee p_3) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee p_3) \wedge$
$(p_1 \vee p_2 \vee q_3) \wedge (q_1 \vee p_2 \vee q_3) \wedge (p_1 \vee q_2 \vee q_3) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee q_3)$

Άσκηση 3

(α) Θα χρησιμοποιήσουμε τη Μέθοδο της Επίλυσης για να δείξουμε ότι η πρόταση

$$p \wedge (p \to q) \wedge (q \to p) \wedge (q \to r) \wedge (r \to q) \wedge (r \to \neg p)$$

είναι ικανοποιήσιμη.

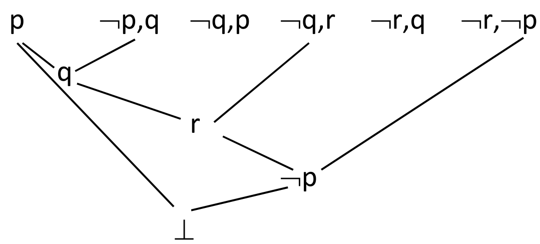
<u>Μετατροπή σε CNF:</u>

$p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg p)$

<u>Προτασιακή Μορφή:</u>

$\{\{p\},\{\neg p,q\},\{\neg q,p\},\{\neg q,r\},\{\neg r,q\},\{\neg r,\neg p\}\}$

<u>Μέθοδος της Επίλυσης:</u>



Η Μέθοδος της Επίλυσης μας έχει οδηγήσει σε διάψευση. Επομένως, η πρόταση είναι μη ικανοποιήσιμη.

(β) Μια πρόταση είναι έγκυρη αν και μόνο αν η άρνησή της δεν είναι ικανοποιήσιμη. Επομένως, για να απαντήσουμε το ερώτημα, θα θεωρήσουμε την άρνηση της πρότασης και εφαρμόζοντας τη Μέθοδο της Επίλυσης θα ελέγξουμε κατά πόσο αυτή είναι ικανοποιήσιμη.

$\neg\ (\ [(p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)] \rightarrow s\ )$

$\equiv \neg\ (\ [\neg(p \vee q) \vee (\neg r \vee s)] \rightarrow s\ )$

$\equiv \neg\ (\ \neg\ [\neg(p \vee q) \vee (\neg r \vee s)] \vee s\ )$

$\equiv \neg\neg\ [\neg(p \vee q) \vee (\neg r \vee s)] \wedge \neg s$

$\equiv\ [\neg(p \vee q) \vee (\neg r \vee s)] \wedge \neg s$

$\equiv\ [(\neg p \wedge \neg\ q) \vee (\neg r \vee s)] \wedge \neg s$

$\equiv\ (\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee s) \wedge \neg s$

Σε προτασιακή μορφή η πρόταση έχει ως εξής:

$\{\{\neg p,\neg r, s\},\{\neg q, \neg r, s\},\{\neg s\}\}$

Εφαρμόζοντας τη Μέθοδο της Επίλυσης παρατηρούμε ότι δεν μας οδηγεί σε διάψευση. Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η πρόταση είναι ικανοποιήσιμη. Για παράδειγμα οι λογικές τιμές p = T, q = T, r = F, s = F κάνουν την πρόταση $\neg\ (\ [(p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)] \rightarrow s\ )$ αληθή. Κατά συνέπεια, η αρχική πρόταση είναι μη έγκυρη.

<u>Άσκηση 4</u>

Οι προτάσεις σε Προτασιακό Λογισμό:

Προϋπόθεση (φ1): $\neg A \rightarrow (L \vee C)$

Προϋπόθεση (φ2): $(\neg L \wedge \neg C) \rightarrow O$

Προϋπόθεση (φ3): $\neg L$

Συμπέρασμα (ψ): $\neg C \rightarrow (A \wedge O)$

Όπου:

A: Ο Σωκράτης ενέκρινε τους νόμους.

L: Ο Σωκράτης έφυγε από την Αθήνα.

C: Ο Σωκράτης προσπάθησε να αλλάξει τους νόμους

O: Ο Σωκράτης συμφώνησε να υπακούει τους νόμους

Μας ενδιαφέρει να δείξουμε ότι η πρόταση $(\phi1\wedge\phi2\wedge\phi3)\rightarrow\psi$ είναι έγκυρη, το οποίο ισχύει αν και μόνο αν η άρνηση της πρότασης δεν είναι ικανοποιήσημη. Επομένως, μεταφράζουμε την πρόταση $\neg[(\phi1\wedge\phi2\wedge\phi3)\rightarrow\psi]$ σε ΚΣΜ και εφαρμόζουμε τη Μέθοδο της Επίλυσης για να την διαψεύσουμε, έτσι δείχνοντας ότι ο αρχικός συλλογισμός $(\phi1\wedge\phi2\wedge\phi3)\rightarrow\psi$ είναι έγκυρος.

$\neg[(\phi1\wedge\phi2\wedge\phi3)\rightarrow\psi] = \neg[\neg(\phi1\wedge\phi2\wedge\phi3)\vee\psi)]$

$\equiv (\phi1\wedge\phi2\wedge\phi3)\wedge\neg\psi$

$\equiv (\neg A\rightarrow(L\vee C))\wedge((\neg L\wedge\neg C)\rightarrow O)\wedge\neg L\wedge\neg(\neg C\rightarrow(A\wedge O))$

$\equiv (\neg\neg A\vee(L\vee C))\wedge(\neg(\neg L\wedge\neg C)\vee O)\wedge\neg L\wedge\neg(\neg\neg C\vee(A\wedge O))$

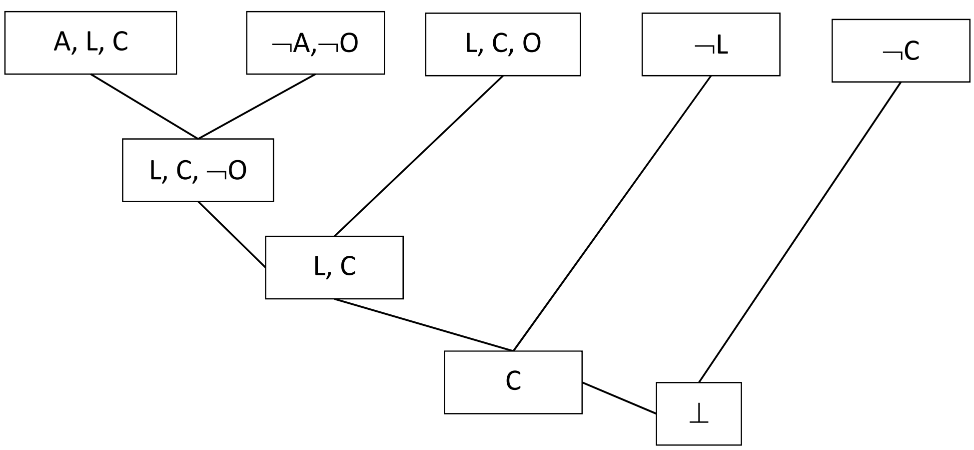
$\equiv (A\vee L\vee C)\wedge(L\vee C\vee O)\wedge(\neg L)\wedge\neg(C\vee(A\wedge O))$

$\equiv (A\vee L\vee C)\wedge(L\vee C\vee O)\wedge(\neg L)\wedge(\neg C\wedge\neg(A\wedge O))$

$\equiv (A\vee L\vee C)\wedge(L\vee C\vee O)\wedge(\neg L)\wedge(\neg C)\wedge(\neg A\vee\neg O)$

<u>Μέθοδος της Επίλυσης</u>

$\{A, L, C\}, \{L, C, O\}, \{\neg L\}, \{\neg C\}, \{\neg A, \neg O\}$



Αφού διαψεύσαμε την πρόταση $\neg[(\phi1\wedge\phi2\wedge\phi3)\rightarrow\psi]$ η $(\phi1\wedge\phi2\wedge\phi3)\rightarrow\psi$ είναι έγκυρη.