

## Φροντιστήριο 4 – Λύσεις Ασκήσεων

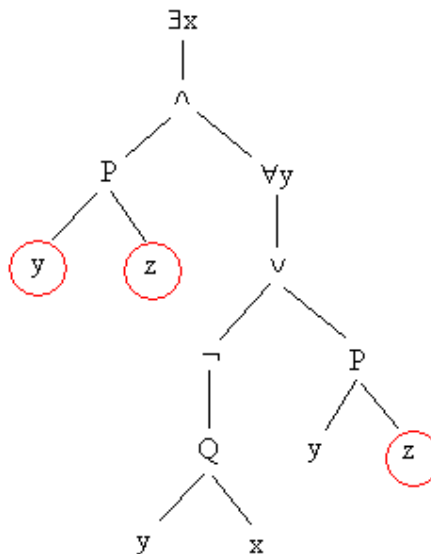
### Άσκηση 1

Έστω  $\phi$  η πρόταση  $\exists x (P(y,z) \wedge (\forall y(\neg Q(y,x) \vee P(y,z))))$ .

(α) Με κόκκινο φαίνονται οι ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών:

$$\exists x (P(y,z) \wedge (\forall y(\neg Q(y,x) \vee P(y,z))))$$

Οι εμφανίσεις αυτές παρουσιάζονται επίσης και στο δένδρο που αντιστοιχεί στη πρόταση πιο κάτω. Οι ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών δεν έχουν ως πρόγονο κάποιο σχετικό ποσοδείκτη.



(β)

(i)  $\phi[w/x] = \phi$  (Το  $x$  δεν εμφανίζεται ελεύθερο στην πρόταση)

$$\phi[w/y] = \exists x (P(w,z) \wedge (\forall y(\neg Q(y,x) \vee P(y,z))))$$

$$\phi[f(x)/y] = \exists x (P(f(x), z) \wedge (\forall y(\neg Q(y,x) \vee P(y,z))))$$

$$\phi[g(y,z)/z] = \exists x (P(y, g(y,z)) \wedge (\forall y(\neg Q(y,x) \vee P(y, g(y,z)))) ) )$$

(ii) Εφόσον η μεταβλητή  $x$  δεν εμφανίζεται ελεύθερη στην πρόταση  $\phi$ , τα  $w$ ,  $f(x)$  και  $g(y,z)$  είναι αντικαταστάσιμα για τη  $x$  στην πρόταση.

(iii) Τα  $w$ , και  $g(y,z)$  είναι αντικαταστάσιμα για τη μεταβλητή  $y$  στην πρόταση  $\phi$ .

(iv) Το βεληνεκές των ποσοδεικτών φαίνεται σκιασμένο πιο κάτω.

$$\exists x (P(y,z) \wedge (\forall y(\neg Q(y,x) \vee P(y,z))))$$

$$\exists x P(y,z) \wedge (\forall y(\neg Q(y,x) \vee P(y,z)))$$

## Άσκηση 2

$$(\alpha) (y = 0) \wedge (y = x) \vdash 0 = x$$

- |                             |  |
|-----------------------------|--|
| 1. $(y = 0) \wedge (y = x)$ | προϋπόθεση                               |
| 2. $y = 0$                  | $\wedge_e 1$                             |
| 3. $y = x$                  | $\wedge_e 1$                             |
| 4. $0 = x$                  | $=_e 3, 2$ όπου $\phi$ η πρόταση $z = x$ |

$$(\beta) t_1 = t_2 \vdash (t + t_1) = (t + t_2)$$

- |                        |  |
|------------------------|--|
| 1. $t_1 = t_2$         | προϋπόθεση   |
| 2. $t + t_1 = t + t_1$ | $=_i$  |
| 3. $t + t_1 = t + t_2$ | $=_e 1, 2$ όπου $\phi$ η πρόταση $t + t_1 = t + x$ |