Φροντιστήριο 5– Λύσεις Ασκήσεων

Άσκηση 1

Έστω η πρόταση $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (R(x,y) \to R(y,z))$.

(α) Η πρόταση δεν ικανοποιείται στο μοντέλο A = {a, b, c, d}, R^A = {(b,c), (d,a), (a,b), (d,d)} αφού (b,c)$\in R^A$ αλλά δεν υπάρχει ζεύγος (c, -) $\in R^A$.

(β) Η πρόταση ικανοποιείται στο μοντέλο A = {a, b, c}, R^A = {(b,c), (c,a), (a,b)} αφού μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι κάθε ζεύγος στοιχείων που συνδέονται μέσω της σχέσης R^A είναι τέτοιο ώστε το δεύτερο από τα δύο στοιχεία να συνδέεται με τη σειρά του με κάποιο άλλο στοιχείο.

Άσκηση 2

(α) $\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \models \forall x\ P(x) \vee \forall y\ Q(y)$

Η συνεπαγωγή δεν είναι αληθής. Αυτό φαίνεται στην ερμηνεία
A = σύνολο των φυσικών αριθμών
$P^A(x)$ = ο x είναι άρτιος
$Q^A(x)$ = ο x είναι περιττός

(β) $\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \models \forall x\ P(x) \wedge \forall y\ Q(y)$

Η συνεπαγωγή είναι αληθής. Θεωρήστε οποιοδήποτε μοντέλο M της πρότασης $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ με σύμπαν το A και ερμηνείες των κατηγορημάτων P και Q τα P^A και Q^A. Τότε, από την Αλήθεια του Tarski:

Για οποιοδήποτε a $\in$ A ισχύει $M \models_{s[x\mapsto a]} (P(x) \wedge Q(x))$

Επομένως, για οποιοδήποτε a $\in$ A έχουμε $M \models_s (P^A(a) \wedge Q^A(a))$.

Από τη σημασιολογία της $\wedge$ συμπεραίνουμε ότι για οποιοδήποτε a $\in$ A, $M \models_s P^A(a)$.

Και επομένως για κάθε a $\in$ A και για οποιαδήποτε απονομή s, έχουμε $M \models_{s[x\mapsto a]} P(x)$. Συνεπώς, $M \models_s \forall x\ P(x)$. Παρόμοια, συμπεραίνουμε ότι $M \models_s \forall x\ Q(x)$ και επομένως το μοντέλο ικανοποιεί τη σύζευξη των δύο προτάσεων, δηλαδή $M \models_s \forall x\ P(x) \wedge \forall y\ Q(y)$.

(γ) $\forall x\ \exists y\ (P(x) \to Q(y)) \models \forall x\ (P(x) \to \exists y\ Q(y))$

Η σημασιολογική συνεπαγωγή είναι έγκυρη. Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι δεν είναι έγκυρη. Τότε, για κάποιο μοντέλο M

$M \models \forall x\ \exists y\ (P(x) \to Q(y))$ (1) και $\neg\ M \models \forall x\ (P(x) \to \exists y\ Q(y))$ (2)

Από το (2) συμπεραίνουμε ότι

όχι $M \models \forall x\ (P(x) \to \exists y\ Q(y))$

επομένως, υπάρχει κάποιο a τέτοιο ώστε

όχι $M \models P(a) \to \exists y\ Q(y)$

Κατά συνέπεια,

$M \models P(a)$ (3)

και όχι $M \models \exists y\, Q(y)$ (4)

Από το (1) συμπεραίνουμε ότι

$M \models \exists y\, (P(a) \rightarrow Q(y))$

και επομένως , υπάρχει b τέτοιο ώστε

$M \models \neg P(a) \vee Q(b)$

Αφού όμως γνωρίζουμε από το (3) ότι $M \models P(a)$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$M \models Q(b)$ και επομένως

$M \models \exists y\, Q(y)$. (5)

Από τα (4) και (5) οδηγούμαστε σε αντίφαση. Συνεπώς η σημασιολογική συνεπαγωγή είναι έγκυρη.

Άσκηση 3

(α) Να γράψετε πρόταση του κατηγορηματικού λογισμού η οποία αληθεύει σε μοντέλα που έχουν ακριβώς 3 στοιχεία.

$\phi_{=3} = \exists x\, \exists y\, \exists z\, [\neg (x=y) \wedge \neg (x=z) \wedge \neg (y=z) \wedge \forall w\, ((x=w) \vee (y = w) \vee (z = w))]$

(β) Να γράψετε πρόταση του κατηγορηματικού λογισμού η οποία αληθεύει σε μοντέλα που έχουν το πολύ 3 στοιχεία.

Γράφουμε

$\phi_{=2} = \exists x\, \exists y\, [\neg(x=y) \wedge \forall w\, ((x=w) \vee (y = w))]$

$\phi_{=1} = \exists x\, \forall w\, (x=w)$

Η ζητούμενη πρόταση είναι η $\phi_{=1} \vee \phi_{=2} \vee \phi_{=3}$

(γ) Είναι δυνατό να διατυπωθεί πρόταση του κατηγορηματικού λογισμού η οποία αληθεύει σε μοντέλα που έχουν πεπερασμένο αριθμό στοιχείων;

Αν ναι, θα είχε την μορφή

$\phi_{=1} \vee \phi_{=2} \vee \phi_{=3} \vee \ldots$

Αφού όμως ο κατηγορηματικός λογισμός δεν μας επιτρέπει να γράφουμε διαζεύξεις με μη πεπερασμένο αριθμό υποπροτάσεων η ζητούμενη πρόταση είναι αδύνατο να προσδιοριστεί στη γλώσσα αυτή.