Φροντιστήριο 8 – Λύσεις Ασκήσεων

Άσκηση 1

a. Αν κάποιο κουμπί κλήσης του ανελκυστήρα πατηθεί στον 3ο όροφο, τότε ο ανελκυστήρας θα μεταβεί στον όροφο αυτό.

$\mathbf{G}\ (\ pressup_3 \vee pressdown_3 \rightarrow \mathbf{F}\ at_3\ )$

b. Ο ανελκυστήρας δεν βρίσκεται ποτέ ταυτόχρονα στον πρώτο και τον δεύτερο όροφο.

$\mathbf{G}\ (\neg\ (at_1 \wedge at_2))$

c. Αν ο ανελκυστήρας δεν βρίσκεται σε κίνηση, τότε η πόρτα του είναι ανοικτή.

$\mathbf{G}\ (stop \rightarrow open)$

d. Αν ο ανελκυστήρας βρίσκεται σταματημένος στον τέταρτο όροφο θα παραμείνει εκεί μέχρι να πατηθεί κάποιο κουμπί.

$\mathbf{G}\ [\ (at_4 \wedge stop)$
$\rightarrow$
$(\ (at_4 \wedge stop)\ \mathbf{U}\ ((\vee_{1\le i\le n}\ press\_up_i) \vee (\vee_{1\le i\le n}\ press\_down_i) \vee (\vee_{1\le i\le n}\ press_i))\ )]$

e. Αν ο ανελκυστήρας εγκλωβιστεί ανάμεσα σε δύο ορόφους, τότε θα σημάνει συναγερμός μέχρι ο ανελκυστήρας να κινηθεί ξανά.

$\mathbf{G}\ \mathbf{[}((\vee_{1\le i<n}\ between_i) \wedge stop) \rightarrow (alarm\ \mathbf{U}\ (go\_up \vee go\_down))\ \mathbf{]}$

Άσκηση 2

1. **F** y — Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 2, 3, και 4.
2. **G** y — Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση.
3. **G F** y — Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 2, 3, και 4.
4. **G** g — Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση.
5. **G** ¬ b — Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση.
6. b **U** ¬ b — Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 2, 3, και 4.
7. **F** g — Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1 και 3.
8. ¬ b **U F** b — Ικανοποιείται στην κατάσταση 4.
9. g **U** (y **U** r)
   Ικανοποιείται στην κατάσταση 1, 2.
10. g **U** ¬y
    Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 3, και 4.
11. **G** (g **U** (y ∧ **F** b))
    Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση.

Άσκησης 3

1. $\mathbf{G}\, p \equiv \neg \mathbf{F} \neg p$

   Αληθές από τον ορισμό του τελεστή **G.**

2. $\mathbf{X}\,\mathbf{F}\, p \equiv \mathbf{F}\,\mathbf{X}\, p$

   Έστω μονοπάτι s. Τότε

   $s \models \mathbf{X}\,\mathbf{F}\, p$ αν και μόνο αν $s^1 \models \mathbf{F}\, p$
   αν και μόνο αν $s^1 \models \text{true}\ \mathbf{U}\ p$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 1$ τέτοιο ώστε $s^j \models p$
   και για κάθε $1 \leq k < j$, $s^k \models \text{true}$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 1$ τέτοιο ώστε $s^j \models p$

   και

   $s \models \mathbf{F}\,\mathbf{X}\, p$ αν και μόνο αν $s \models \text{true}\ \mathbf{U}\ \mathbf{X}\, p$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models \mathbf{X}\, p$
   και για κάθε $0 \leq k < j$ $s^k \models \text{true}$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models \mathbf{X}\, p$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $(s^j)^1 \models p$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^{j+1} \models p$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 1$ τέτοιο ώστε $s^j \models p$

   Προφανώς οι δύο ιδιότητες ικανοποιούνται ακριβώς από τα ίδια μονοπάτια και επομένως η ισοδυναμία ισχύει.

3. $(\mathbf{F}\,\mathbf{G}\, p) \wedge (\mathbf{F}\,\mathbf{G}\, q) \equiv \mathbf{F}\,(\mathbf{G}\, p \wedge \mathbf{G}\, q)$

   Έστω μονοπάτι s. Τότε

   $s \models (\mathbf{F}\,\mathbf{G}\, p) \wedge (\mathbf{F}\,\mathbf{G}\, q)$ αν και μόνο αν $s \models (\text{true}\ \mathbf{U}\ \mathbf{G}\, p) \wedge (\text{true}\ \mathbf{U}\ \mathbf{G}\, q)$
   αν και μόνο αν $s \models (\text{true}\ \mathbf{U}\ \mathbf{G}\, p)$ και $s \models (\text{true}\ \mathbf{U}\ \mathbf{G}\, q)$
   αν και μόνο αν υπάρχουν $i,j \geq 0$ τέτοια ώστε
   $s^i \models \mathbf{G}\, p$ και $s^j \models \mathbf{G}\, q$
   και για κάθε $0 \leq k < i,j$, $s^k \models \text{true}$
   αν και μόνο αν υπάρχουν $i,j \geq 0$ τέτοια ώστε, για κάθε
   $k \geq i$, $s^k \models p$ και για κάθε $l \geq j$ $s^l \models q$
   αν και μόνο αν υπάρχει $m \geq 0$ ($m = \max(i,j)$) τέτοιο ώστε,
   για κάθε $n \geq m$ $s^n \models p$ και $s^n \models q$
   αν και μόνο αν υπάρχει $m \geq 0$ τέτοιο ώστε
   $s^m \models \mathbf{G}\, p$ και $s^m \models \mathbf{G}\, q$
   αν και μόνο αν υπάρχει $m \geq 0$ τέτοιο ώστε
   $s^m \models \mathbf{G}\, p \wedge \mathbf{G}\, q$
   αν και μόνο αν υπάρχει $m \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^m \models (\mathbf{G}p \wedge \mathbf{G}q)$
   και για κάθε $0 \leq k <$, $s^k \models \text{true}$
   αν και μόνο αν $s \models \text{true}\ \mathbf{U}\ (\mathbf{G}\, p \wedge \mathbf{G}\, q)$
   αν και μόνο αν $s \models \mathbf{F}\,(\mathbf{G}\, p \wedge \mathbf{G}\, q)$

   Προφανώς οι δύο ιδιότητες ικανοποιούνται ακριβώς από τα ίδια μονοπάτια και επομένως η ισοδυναμία ισχύει.

4. (p **U** q) **U** q ≡ p **U** q

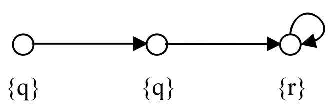
Θα θεωρήσουμε τις δύο κατευθύνσεις ξεχωριστά.

Έστω μονοπάτι s, τέτοιο ώστε, s ⊨ (p **U** q) **U** q. Τότε έχουμε,
υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε s^j ⊨ q και για κάθε $0 \leq k < j$, s^k ⊨ (p **U** q).
Έστω i είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο s^i ⊨ q. Τότε
s^i ⊨ q και για κάθε $0 \leq k < i$, s^k ⊨ (p **U** q),
δηλαδή,
s^i ⊨ q και για κάθε $0 \leq k < i$, υπάρχει $m \geq k$ τέτοιο ώστε s^m ⊨ q (*)
και για κάθε $0 \leq n < m$ s^n ⊨ p.
Αφού το i είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο s^i ⊨ q, από το (*) συμπεράνουμε
s^i ⊨ q και για κάθε $0 \leq n < i$, s^n ⊨ p
Επομένως, συμπεραίνουμε ότι
s ⊨ p **U** q.

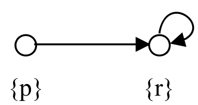
Για την αντίθετη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι για κάποιο μονοπάτι s, ισχύει ότι, s ⊨ p **U** q. Τότε έχουμε,
υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε s^j ⊨ q και για κάθε $0 \leq k < j$, s^k ⊨ p.
Επιπλέον ισχύει ότι
υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε s^j ⊨ q και για κάθε $0 \leq k < j$, ($\exists m = j$ τέτοιο ώστε s^m ⊨ q και για κάθε $k \leq n < m$, s^n ⊨ p).
Συνεπώς έχουμε ότι
υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε s^j ⊨ q και για κάθε $0 \leq k < j$ s^k ⊨ p U q
που συνεπάγεται ότι
s ⊨ (p **U** q) **U** q
και το ζητούμενο έπεται.

5. (p **U** q) ∧ **(**q **U** r) ≡ (p **U** r)

Η ισοδυναμία δεν ισχύει προς καμιά κατεύθυνση. Η πιο κάτω δομή ικανοποιεί την ιδιότητα (p **U** q) ∧ **(**q **U** r) αλλά όχι την (p **U** r).

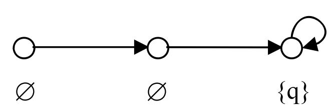


Η πιο κάτω δομή δεν ικανοποιεί την (p **U** q) ∧ **(**q **U** r) αλλά ικανοποιεί την (p **U** r).



6. **G** p ∨ **F** q ≡ (**G** p) ∨ (p **U** q)

Η ισοδυναμία δεν ισχύει προς την κατεύθυνση ⇒, όπως φαίνεται στο πιο κάτω αντιπαράδειγμα.



Η ισοδυναμία ισχύει προς την κατεύθυνση ⇐. Απόδειξη:

Έστω μονοπάτι s. Τότε

Αν $s \models (\mathbf{G}\, p) \vee (p\, \mathbf{U}\, q)$ τότε $s \models \mathbf{G}\, p$ ή $s \models (p\, \mathbf{U}\, q)$

τότε $s \models \mathbf{G}\, p$ ή υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$ και για κάθε $0 \leq k < j$, $s^k \models p$

τότε $s \models \mathbf{G}\, p$ ή υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$

τότε $s \models \mathbf{G}\, p$ ή υπάρχει $s \models F\, q$

τότε $s \models \mathbf{G}\, p \vee F\, q$

Επομένως το ζητούμενο έπεται.