Φροντιστήριο 2, 19/09/18

Άσκηση 1

Να σχεδιάσετε το δένδρο που αντιστοιχεί στην πιο κάτω πρόταση του Προτασιακού Λογισμού και βάσει αυτού να κατασκευάσετε τον πίνακα αληθείας του.

$$\neg(s\rightarrow(\neg(p\rightarrow(q\vee\neg s))))$$

Άσκηση 2

Να αποδείξετε τα πιο κάτω λογικά επακόλουθα στα οποία βασίζεται η πληρότητα του Προτασιακού Λογισμού.

(α) $\neg \phi_1 \wedge \neg \phi_2 \vdash \phi_1 \rightarrow \phi_2$

(β) $\phi_1 \wedge \neg \phi_2 \vdash \neg(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$

(γ) $\neg \phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \phi_1 \rightarrow \phi_2$

(δ) $\phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \phi_1 \rightarrow \phi_2$

Άσκηση 3

Ποια από τις πιο κάτω προτάσεις είναι ισοδύναμη με την $p\rightarrow(q \vee r)$;

(α) $q \vee (\neg p \vee r)$

(β) $q \wedge (\neg r \rightarrow p)$

(γ) $p \wedge (\neg r \rightarrow q)$

(δ) $\neg q \wedge (\neg r \rightarrow \neg p)$

Άσκηση 4

Ένα σύνολο από τελεστές C του Προτασιακού Λογισμού είναι *επαρκές* αν για κάθε πρόταση ϕ υπάρχει ισοδύναμη πρόταση ψ όπου η ψ χρησιμοποιεί μόνο τελεστές από το σύνολο C. Για παράδειγμα, το σύνολο $\{\neg, \vee\}$ είναι επαρκές αφού κάθε εμφάνιση των τελεστών $\rightarrow$ και $\wedge$ μπορεί να αντικατασταθεί μέσω των ισοδυναμιών

$$\phi\rightarrow\psi \equiv \neg \phi \vee\psi$$
$$\phi\wedge\psi \equiv \neg (\neg\phi \vee \neg\psi)$$

(α) Να δείξετε ότι τα σύνολα $\{\neg, \rightarrow\}$ και $\{\rightarrow, \perp\}$ είναι επαρκή σύνολα τελεστών.

(β) Να δείξετε ότι για να είναι ένα υποσύνολο των τελεστών $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \perp\}$ επαρκές πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα από τους τελεστές $\neg$ και $\perp$.

(γ) Το σύνολο $\{\neg, \leftrightarrow\}$ είναι ένα επαρκές σύνολο τελεστών;