ΕΠΛ 232 - Φροντιστήριο 1

Πρόβλημα 1 : Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Έστω

$$\begin{pmatrix} r & \mathrm{s} \\ \mathrm{t} & \mathrm{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & \mathrm{g} \\ \mathrm{f} & \mathrm{h} \end{pmatrix}$$

Στόχος: υπολογισμός του γινομένου (δηλαδή των τιμών r, s, t, και u)

Επισυνάπτονται τρεις τρόποι επίτευξης του στόχου. Να συζητήσετε την ορθότητα και την αποδοτικότητά τους.

Να τους χρησιμοποιήσετε για τη δημιουργία διαίρει και βασίλευε αλγορίθμων για πολλαπλασιασμό πινάκων. Ποιος ο χρόνος εκτέλεσης των αλγορίθμων σας;

Πρόβλημα 2: Πολλαπλασιασμός ακεραίων

Θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε δύο n-αψήφιους αριθμούς α και β. Ο γνωστός τρόπος έχει χρόνο εκτέλεσης $O(n^2)$. Μπορούμε να το βελτιώσουμε;

Υποθέτουμε απλοποιητικά ότι ο n είναι δύναμη του 2. Τότε οι α και β μπορούν να γραφούν ως

$$\alpha = x \cdot 10^{n/2} + y$$

$$\beta = w \cdot 10^{n/2} + z$$

όπου οι x, y, w και z έχουν ο καθένας n/2 ψηφία.

Συνεπώς το γινόμενο α·β δίνεται ως το άθροισμα

$$\alpha \cdot \beta = xw \cdot 10^{n} + (xz + wy) \cdot 10^{n/2} + yz$$

το οποίο απαιτεί 4 πολλαπλασιασμούς (n/2)-αψήφιων ακεραίων. Χρήση αυτής της μεθόδου μας δίνει αλγόριθμο πολυπλοκότητας $\Theta(n^2)$.

Είναι δυνατό να υπολογίσουμε το γινόμενο με μόνο 3 πολλαπλασιασμούς ακεραίων μισού μεγέθους;

Παρατηρούμε ότι υπολογίζοντας τις τιμές των xw, (x+y)(w+z), yz (3 πολλαπλασιασμοί) η τιμή του xz+wy προκύπτει ως

$$xz+wy=(x+y)(w+z) - xw - yz$$

Η διαδικασία multiply δέχεται σαν δεδομένα εισόδου δύο ακεραίους αριθμούς και ένα επιπλέον ακέραιο ο οποίος αντιστοιχεί στον αριθμό των ψηφίων τους και επιστρέφει το γινόμενο τους.

```
multiply(a,b,n)
   if (n==1) return a·b;
   else
     x = a div 10^(n/2);
     y = a mod 10^(n/2);
     w = b div 10^(n/2);
     z = b mod 10^(n/2);

     p = multiply(x,w,n/2);
     q = multiply(y,z,n/2);
     r=multiply(x+y,w+z,n/2);

     return p·10^n +(r-p-q)·10^(n/2) + q;
```

Έστω T(n) ο χρόνος εκτέλεσης της multiply(a,b,n). Τότε

$$T(n) = 3 \cdot T(n/2) + O(n)$$

όπου O(n) είναι ο χρόνος που απαιτείται για την εκτέλεση των div, mod, και των υπόλοιπων προσθέσεων, αφαιρέσεων, διαιρέσεων και πολλαπλασιασμών. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα γενικής χρήσης, παίρνουμε ότι

$$\Theta(n^{\lg 3})$$