

## Φροντιστήριο 2 – Σκελετοί Λύσεων

### Λύση Άσκησης 1

- a. Αν πατηθεί κάποιο κουμπί στον τρίτο όροφο, τότε ο ανελκυστήρας θα μετακινηθεί σε αυτόν τον όροφο.

$$\mathbf{G} ( \textit{pressup}_3 \vee \textit{pressdown}_3 \rightarrow \mathbf{F} \textit{at}_3 )$$

- b. Ο ανελκυστήρας δεν μπορεί να βρίσκεται ταυτόχρονα στον πρώτο και στον δεύτερο όροφο.

$$\mathbf{G} (\neg (\textit{at}_1 \wedge \textit{at}_2))$$

- c. Αν ο ανελκυστήρας βρίσκεται σε κίνηση, τότε η πόρτα του πρέπει να είναι κλειστή.

$$\mathbf{G} (\textit{stop} \rightarrow \textit{open})$$

- d. Αν κανένα κουμπί δεν είναι πατημένο και ο ανελκυστήρας βρίσκεται στον τέταρτο όροφο, τότε θα παραμείνει στον όροφο αυτό μέχρις ότου να πατηθεί κάποιο κουμπί.

$$\mathbf{G} [ \textit{at}_4 \wedge \neg (\forall_{1 \leq i \leq n} \textit{memory\_up}_i) \wedge \neg (\forall_{1 \leq i \leq n} \textit{memory\_down}_i) \wedge \neg (\forall_{1 \leq i \leq n} \textit{memory\_press}_i) ] \\ \rightarrow [ (\textit{at}_4 \wedge \textit{stop}) \mathbf{U} ((\forall_{1 \leq i \leq n} \textit{press\_up}_i) \vee (\forall_{1 \leq i \leq n} \textit{press\_down}_i) \vee (\forall_{1 \leq i \leq n} \textit{press}_i)) ]$$

Το πιο πάνω προϋποθέτει πως κάθε πάτημα κουμπιού παραμένει στην μνήμη του ανελκυστήρα μέχρις ότου το σχετικό αίτημα να εξυπηρετηθεί. Πως μπορεί να διατυπωθεί αυτή η ιδιότητα;

- e. Κάθε φορά που ο ανελκυστήρας εγκλωβίζεται ανάμεσα σε δύο ορόφους, ο συναγερμός θα ηχεί μέχρις ότου ο ανελκυστήρας να βρεθεί ξανά σε κίνηση.

$$\mathbf{G} [ (((\forall_{1 \leq i < n} \textit{between}_i) \wedge \textit{stop}) \rightarrow (\textit{alarm} \mathbf{U} (\textit{go\_up} \vee \textit{go\_down}))) ]$$

### Λύση Άσκησης 2

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\mathbf{F} \gamma$   | Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 2, 3, και 4. |
| 2. $\mathbf{G} \gamma$   | Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση.          |
| 3. $\mathbf{G} \mathbf{F} \gamma$  | Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 2, 3, και 4. |
| 4. $\mathbf{F} g$  | Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1 και 3.        |
| 5. $\mathbf{G} g$  | Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση.          |
| 6. $\mathbf{G} \neg b$   | Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση.          |
| 7. $b \mathbf{U} \neg b$   | Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 2, 3, και 4. |
| 8. $\neg b \mathbf{U} \mathbf{F} b$  | Ικανοποιείται στην κατάσταση 4.                |
| 9. $g \mathbf{U} (\gamma \mathbf{U} r)$  | Ικανοποιείται στην κατάσταση 1.                |
| 10. $g \mathbf{U} \neg \gamma$   | Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 3, και 4.    |
| 11. $\mathbf{G} (g \mathbf{U} (\gamma \wedge \mathbf{F} b \wedge \mathbf{F} r))$ | Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση.          |
| 12. $\mathbf{G} (g \Rightarrow \mathbf{X} \gamma)$                               | Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 2, 3, και 4. |

### Λύση Άσκησης 3

$$1. \mathbf{G} p \Leftrightarrow \neg \mathbf{F} \neg p$$

Αληθές από τον ορισμό του τελεστή **G**.

$$2. \mathbf{X} \mathbf{F} p \Leftrightarrow \mathbf{F} \mathbf{X} p$$

Έστω μονοπάτι  $s$ . Τότε

$s \models \mathbf{X} \mathbf{F} p$  αν και μόνο αν  
αν και μόνο αν  
αν και μόνο αν

και

$s \models \mathbf{F} \mathbf{X} p$  αν και μόνο αν  
αν και μόνο αν  
αν και μόνο αν  
αν και μόνο αν  
αν και μόνο αν

$s^1 \models \mathbf{F} p$   
 $s^1 \models \mathbf{true} \mathbf{U} p$   
υπάρχει  $j \geq 1$  τέτοιο ώστε  $s^j \models p$   
και για κάθε  $1 \leq k < j$ ,  $s^k \models \mathbf{true}$   
υπάρχει  $j \geq 1$  τέτοιο ώστε  $s^j \models p$

$s \models \mathbf{true} \mathbf{U} \mathbf{X} p$   
υπάρχει  $j \geq 0$  τέτοιο ώστε  $s^j \models \mathbf{X} p$   
και για κάθε  $0 \leq k < j$   $s^k \models \mathbf{true}$   
υπάρχει  $j \geq 0$  τέτοιο ώστε  $s^j \models \mathbf{X} p$   
υπάρχει  $j \geq 0$  τέτοιο ώστε  $(s^j)^1 \models p$   
υπάρχει  $j \geq 0$  τέτοιο ώστε  $s^{j+1} \models p$   
υπάρχει  $j \geq 1$  τέτοιο ώστε  $s^j \models p$

Προφανώς οι δύο ιδιότητες ικανοποιούνται ακριβώς από τα ίδια μονοπάτια και επομένως η ισοδυναμία ισχύει.

$$3. (\mathbf{F} \mathbf{G} p) \wedge (\mathbf{F} \mathbf{G} q) \Leftrightarrow \mathbf{F} (\mathbf{G} p \wedge \mathbf{G} q)$$

Έστω μονοπάτι  $s$ . Τότε

$s \models (\mathbf{F} \mathbf{G} p) \wedge (\mathbf{F} \mathbf{G} q)$   
αν και μόνο αν  
αν και μόνο αν  
αν και μόνο αν  
αν και μόνο αν  
αν και μόνο αν  
αν και μόνο αν  
αν και μόνο αν

$s \models \mathbf{F} \mathbf{G} p$  και  $s \models \mathbf{F} \mathbf{G} q$   
υπάρχει  $i \geq 0$  τέτοιο ώστε  $s^i \models \mathbf{G} p$   
και υπάρχει  $j \geq 0$  τέτοιο ώστε  $s^j \models \mathbf{G} q$   
υπάρχει  $i \geq 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  
 $k \geq 0$   $s^{i+k} \models p$   
και υπάρχει  $j \geq 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  
 $k \geq 0$   $s^{j+k} \models q$   
υπάρχει  $n \geq 0$  ( $n = \max(i, j)$ )  
τέτοιο ώστε για κάθε  $k \geq 0$   $s^{n+k} \models p$  και  
για κάθε  $k \geq 0$   $s^{n+k} \models q$   
υπάρχει  $n \geq 0$  τέτοιο ώστε  $s^n \models \mathbf{G} p$   
και  $s^n \models \mathbf{G} q$   
υπάρχει  $i \geq 0$  τέτοιο ώστε  $s^i \models \mathbf{G} p \wedge \mathbf{G} q$   
 $s \models \mathbf{F} (\mathbf{G} p \wedge \mathbf{G} q)$

Προφανώς οι δύο ιδιότητες ικανοποιούνται ακριβώς από τα ίδια μονοπάτια και επομένως η ισοδυναμία ισχύει.

4.  $(p \cup q) \cup q \Leftrightarrow p \cup q$

Έστω μονοπάτι  $s$ . Τότε

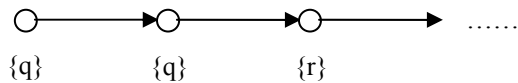
$s \models (p \cup q) \cup q$

- αν και μόνο αν υπάρχει  $i \geq 0$  τέτοιο ώστε  $s^i \models q$   
 και για κάθε  $0 \leq k < i$   $s^k \models p \cup q$
- αν και μόνο αν υπάρχει  $i \geq 0$  τέτοιο ώστε  $s^i \models q$   
 και για κάθε  $0 \leq k < i$ , υπάρχει  $m \geq 0$  τέτοιο ώστε  
 $s^{k+m} \models q$  και για κάθε  $0 \leq n < m$   $s^{k+n} \models p$
- αν και μόνο αν υπάρχει  $i \geq 0$  τέτοιο ώστε  $s^i \models q$  και η  $i$  είναι η  
 πρώτη θέση στο μονοπάτι που ικανοποιεί το  $q$   
 και για κάθε  $0 \leq k < i$   $s^k \models p$
- αν και μόνο αν  $s \models p \cup q$

Προφανώς οι δύο ιδιότητες ικανοποιούνται ακριβώς από τα ίδια μονοπάτια και επομένως η ισοδυναμία ισχύει.

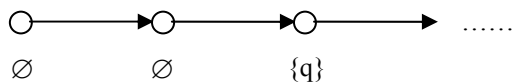
5.  $(p \cup q) \wedge (q \cup r) \Leftrightarrow (p \cup r)$

Η ισοδυναμία δεν ισχύει προς καμιά κατεύθυνση. Ακολουθεί αντιπαράδειγμα για την κατεύθυνση  $\Rightarrow$ .



6.  $G p \vee F q \Leftrightarrow (G p) \vee (p \cup q)$

Η ισοδυναμία δεν ισχύει προς την κατεύθυνση  $\Rightarrow$ , όπως φαίνεται στο πιο κάτω αντιπαράδειγμα.



Η ισοδυναμία ισχύει προς την κατεύθυνση  $\Leftarrow$ . Απόδειξη;