Σειρά Προβλημάτων 1 – Λύσεις

Άσκηση 1

(α) Χρησιμοποιούμε τις επιπλέον μεταβλητές PC_1, PC_2, (program counters) οι οποίες παίρνουν ως τιμές ονόματα των γραμμών του κώδικα όπως φαίνεται πιο κάτω.

```
 bool y1:= false, y2:= false;
 int  s = 1;
     while true do{
A1          atomic{
                 y1 = true;
                 s = 1;}
A2          wait until(y2 = false OR s = 1)
A3          //critical section;
            y1 = false;
  }
     while true do
B1          atomic{
                 y2 = true;
                 s = 2;}
B2          wait until(y1 = false OR s = 2)
B3          //critical section;
            y2 = false;
  }
```

Ο γράφος μεταβάσεων δίνεται από την πλειάδα (V, S , T, p) όπου

$V = \{PC_1, PC_2, s, y_1, y_2\}$

S = σύνολο όλων των δυνατών αναθέσεων τιμών στις πιο πάνω μεταβλητές

T = {

T_1 : $PC_1=A_1 \rightarrow (PC_1, s, y_1) := (A_2, 1, true)$,

T_2 : $PC_1=A_2 \wedge (y_2 = false \vee s = 1) \rightarrow PC_1 := A_3$,

T_3 : $PC_1=A_3 \rightarrow (PC_1, y_1) := (A_1, false)$,

T_4 : $PC_2=B_1 \rightarrow (PC_2, s, y_2) := (B_2, 2, true)$,

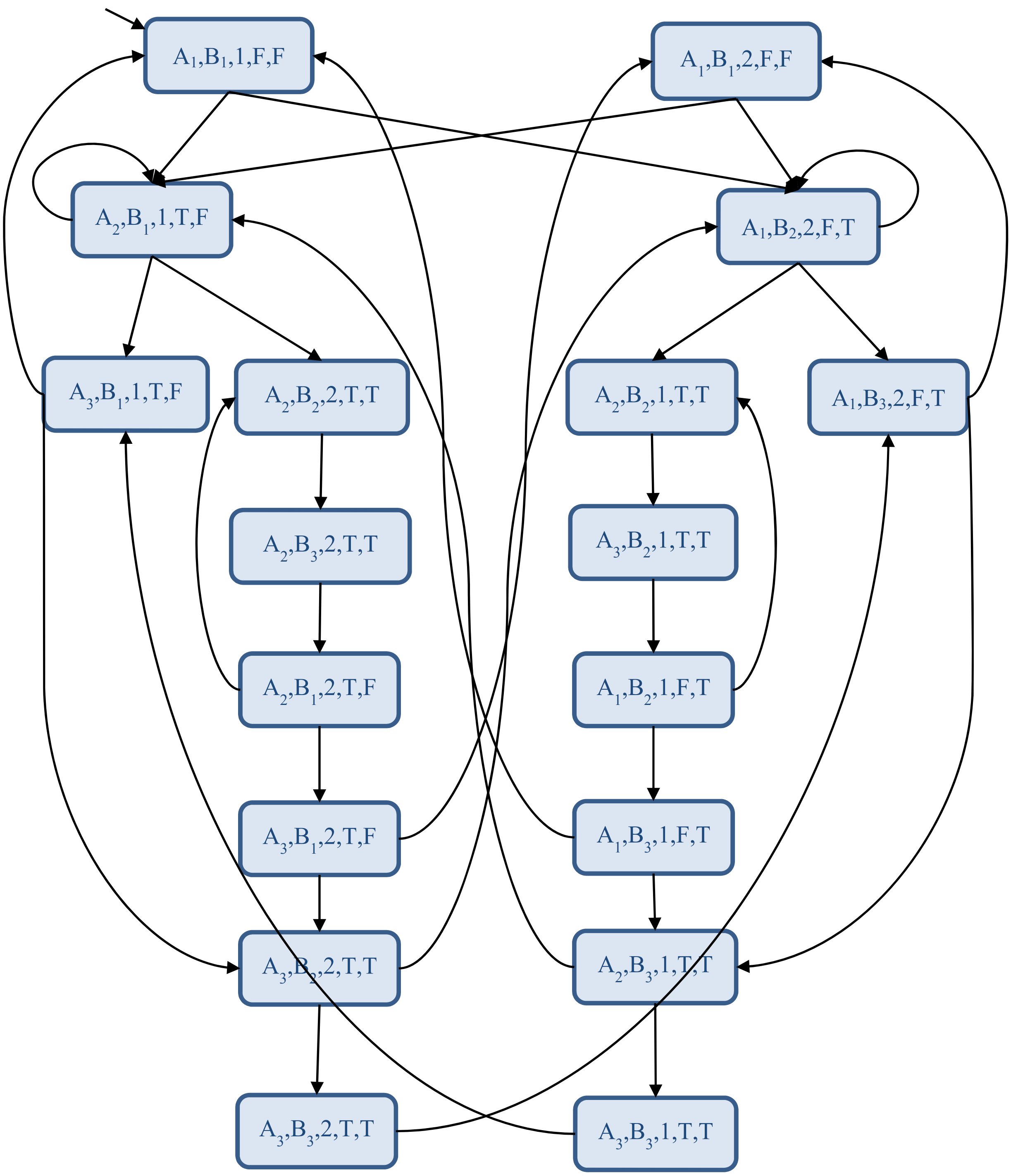
T_5 : $PC_2=B_2 \wedge (y_1 = false \vee s = 2) \rightarrow PC_2 := B_3$,

T_6 : $PC_2=B_3 \rightarrow (PC_2, y_2) := (B_1, false)$

}

$p \equiv PC_1=A_1 \wedge PC_2=B_1 \wedge y_1= y_2=false \wedge s=1$

(β) Το σύστημα μεταβάσεων αποτελείται από πεντάδες (A,B,t,x,y) που αναφέρονται στις τιμές των μεταβλητών (PC_1, PC_2, turn, y_1 και y_2) που ισχύουν στην κάθε κατάσταση. Ακολουθεί το σχετικό σχεδιάγραμμα.



(γ) Από τη μελέτη του γράφου μεταβάσεων στο μέρος (β) οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι διεργασίες μπορούν να οδηγηθούν σε κατάσταση όπου και οι δύο βρίσκονται στο κρίσιμό τους τμήμα. Αυτό μπορεί να συμβεί, για παράδειγμα, μετά από την ακολουθία μεταβάσεων, T_1, T_4, T_5, T_6, T_2, T_4, T_5.

(δ) Σχετικό μονοπάτι είναι το (A_1, B_1, 1, F, F) $\rightarrow$ (A_1, B_2, 2, F, T) $\rightarrow$ (A_1, B_3, 2, F, T) $\rightarrow$ (A_1, B_1, 2, F, F) $\rightarrow$ (A_1, B_2, 2, F, T) $\rightarrow$ (A_1, B_3, 2, F, T) $\rightarrow$…

(ε) Για να αποφευχθεί το μονοπάτι είναι αρκετό να υιοθετήσουμε την ασθενή δικαιοσύνη μεταβάσεων.

Άσκηση 2

(α) Το φανάρι δεν θα είναι ποτέ κόκκινο και κίτρινο ταυτόχρονα.

$\mathbf{G}\, \neg(\text{red} \wedge \text{yellow})$

(β) Αν το φανάρι γίνεται πράσινο απείρως συχνά τότε θα γίνεται κόκκινο απείρως συχνά και κίτρινο απείρως συχνά.

$\mathbf{G\,F}\ \text{green} \rightarrow (\ \mathbf{G\,F}\ \text{red} \wedge \mathbf{G\,F}\ \text{yellow})$

(γ) Το φανάρι θα επαναλαμβάνει την πιο κάτω εναλλαγή χρωμάτων κόκκινο → κόκκινο → κίτρινο → πράσινο → κίτρινο.

$\mathbf{G}(\text{red} \rightarrow \neg\text{yellow} \wedge \neg\text{green}) \wedge$

$\mathbf{G}(\text{yellow} \rightarrow \neg\ \text{red} \wedge \neg\text{green}) \wedge$

$\mathbf{G}(\text{green} \rightarrow \neg\ \text{red} \wedge \neg\ \text{yellow}) \wedge$

$\text{red} \wedge \mathbf{X}\ \text{red} \wedge$

$\mathbf{G}[\ (\text{red} \wedge \mathbf{X}\ \text{red} \rightarrow \mathbf{XX}\ \text{yellow}) \wedge (\text{yellow} \rightarrow \mathbf{X}\ \text{green})$

$\wedge (\text{green} \rightarrow \mathbf{X}\ \text{red} \wedge \mathbf{XX}\ \text{red})\ ]$

(δ) Αν κάποια στιγμή το φανάρι είναι πράσινο τότε προηγούμενα θα πρέπει σε κάποια στιγμή να υπήρξε κόκκινο και σε κάποια στιγμή κίτρινο.

$\mathbf{F}\ \text{green} \rightarrow [(\neg\text{green}\ \mathbf{U}\ \text{red}\wedge\neg\text{green}\ ) \wedge (\neg\text{green}\ \mathbf{U}\ \text{yellow}\wedge\neg\text{green}\ )\ ]$

(ε) Το φανάρι εναλλάσσεται ανάμεσα στα χρώματα κόκκινο, πράσινο και κίτρινο με αυτή τη σειρά έτσι ώστε κάθε χρώμα να διατηρείται σε τουλάχιστον μια κατάσταση ή και περισσότερες.

$\mathbf{G}(\text{red} \rightarrow \neg\text{yellow} \wedge \neg\text{green}) \wedge$

$\mathbf{G}(\text{yellow} \rightarrow \neg\ \text{red} \wedge \neg\text{green}) \wedge$

$\mathbf{G}(\text{green} \rightarrow \neg\ \text{red} \wedge \neg\ \text{yellow}) \wedge$

$\text{red} \wedge$

$\mathbf{G}(\text{red} \rightarrow \mathbf{X}\ (\text{red} \vee \text{green})) \wedge$

$\mathbf{G}(\text{green} \rightarrow \mathbf{X}\ (\text{green} \vee \text{yellow})) \wedge$

$\mathbf{G}(\text{yellow} \rightarrow \mathbf{X}\ (\text{yellow} \vee \text{red})) \wedge$

$\mathbf{GF}\ \text{red} \wedge \mathbf{GF}\ \text{green} \wedge \mathbf{GF}\ \text{yellow}$

(στ) Το φανάρι εναλλάσσεται ανάμεσα στα χρώματα κόκκινο, κίτρινο, πράσινο και κίτρινο με αυτή τη σειρά έτσι ώστε κάθε χρώμα να διατηρείται σε τουλάχιστον μια κατάσταση ή και περισσότερες.

$\mathbf{G}(\text{red} \rightarrow \neg\text{yellow} \wedge \neg\text{green}) \wedge$

$\mathbf{G}(\text{yellow} \rightarrow \neg\ \text{red} \wedge \neg\text{green}) \wedge$

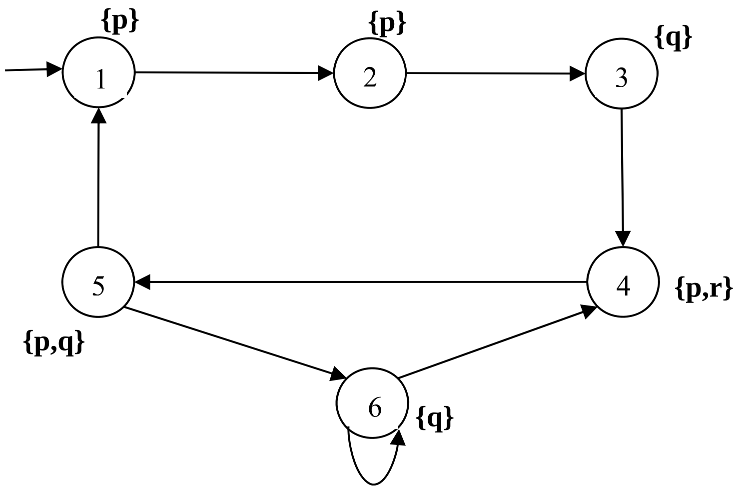
$\mathbf{G}(\text{green} \rightarrow \neg\ \text{red} \wedge \neg\ \text{yellow}) \wedge$

$\text{red} \wedge$

$\mathbf{G}(\text{red} \rightarrow \text{red}\ \mathbf{U}$

$(\text{yellow} \wedge \text{yellow}\ \mathbf{U}\ (\text{green} \wedge \text{green}\ \mathbf{U}\ (\text{yellow} \wedge \text{yellow}\ \mathbf{U}\ \text{red}))))$

Άσκηση 3



i. **X X** p
   1. Δεν υπάρχει κανένα μονοπάτι στο οποίο η μεθεπόμενη κατάσταση να ικανοποιεί το p.
   2. Με βάση την πιο πάνω παρατήρηση, η δομή δεν ικανοποιεί την ιδιότητα.

ii. **F G** q $\vee$ **G F** r
   1. Μονοπάτι που ικανοποιεί την ιδιότητα: 123456666666….
   2. Η δομή ικανοποιεί την ιδιότητα αφού σε κάθε μονοπάτι ικανοποιείται ένα από τα **F G** q και **G F** r.

iii. **G F X** $\neg$q
   1. Μονοπάτι που ικανοποιεί την ιδιότητα: 1234512345…
   2. Η δομή δεν ικανοποιεί την ιδιότητα. Το μονοπάτι 123456666666… δεν περνά απείρως συχνά από κατάσταση η οποία δεν ικανοποιεί το q.

iv. **G** (p **U** ($\neg$p $\wedge$ q))
   1. Μονοπάτι που ικανοποιεί την ιδιότητα: 123456666666….
   2. Όλα τα μονοπάτια που δεν ικανοποιούν το p ικανοποιούν το q. Έτσι, μπορούμε να δούμε ότι η δομή ικανοποιεί την ιδιότητα .

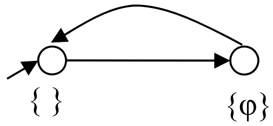
v. **GF** ($\neg$p $\wedge$ q) $\rightarrow$ **FG** q
   1. Μονοπάτι που ικανοποιεί την ιδιότητα: 123456666666….
   2. Η δομή δεν ικανοποιεί την ιδιότητα αφού, π.χ., στο μονοπάτι 1234512345…, αν και ικανοποιείται η ιδιότητα-συνθήκη **GF** ($\neg$p $\wedge$ q) δεν ικανοποιείται το συμπέρασμα **FG** q.

vi. **FG** q $\rightarrow$ **GF** ($\neg$p $\wedge$ q)
   1. Μονοπάτι που ικανοποιεί την ιδιότητα: 1234512345… (Το μονοπάτι δεν ικανοποιεί τη συνθήκη **FG** q.)
   2. Η δομή ικανοποιεί την ιδιότητα αφού στο μοναδικό μονοπάτι όπου ικανοποιείται η ιδιότητα **FG** q ικανοποιείται και η ιδιότητα **GF** ($\neg$p $\wedge$ q).

Άσκηση 4

i. **F** ϕ $\wedge$ **X G** $\phi \equiv$ **F** ϕ

Η ισοδυναμία δεν ισχύει. Αντιπαράδειγμα:



Στην πιο πάνω δομή ικανοποιείται το δεξί μέλος της ισοδυναμίας ενώ το αριστερό μέλος δεν ικανοποιείται.

ii. $\mathbf{G}\,\phi \wedge \mathbf{X}\,\mathbf{F}\,\phi \equiv \mathbf{G}\,\phi$

Έστω δομή M με αρχική κατάσταση s, τότε

$M, s \models G\,\phi \wedge X\,F\,\phi$ αν και μόνο αν για κάθε μονοπάτι w, $w \models G\,\phi$ και $w \models X\,F\,\phi$
αν και μόνο αν για κάθε μονοπάτι w, $\forall\, i \geq 0\ w_i \models \phi$ και $w_1 \models F\,\phi$
αν και μόνο αν για κάθε μονοπάτι w, $\forall\, i \geq 0\ w_i \models \phi$ και υπάρχει $j \geq 1$ τέτοιο ώστε $w_j \models \phi$
αν και μόνο αν για κάθε μονοπάτι w, $\forall k \geq 0\ w_k \models \phi$
αν και μόνο αν για κάθε μονοπάτι w, $w \models G\,\phi$

iii. $\mathbf{GG}\,(\phi \vee \neg\psi) \equiv \neg\mathbf{F}(\neg\phi \wedge \psi)$

Έστω δομή M με αρχική κατάσταση s, τότε

$M, s \models \mathbf{GG}\,(\phi \vee \neg\psi)$ αν και μόνο αν για κάθε μονοπάτι w, $w \models \mathbf{GG}\,(\phi \vee \neg\psi)$
αν και μόνο αν για κάθε μονοπάτι w, $\forall\, i \geq 0$ $w^i \models \mathbf{G}\,(\phi \vee \neg\psi)$
αν και μόνο αν για κάθε μονοπάτι w, $\forall\, i \geq 0$ και $\forall\, j \geq i$ $(w^i)^j \models \phi \vee \neg\psi$
αν και μόνο αν για κάθε μονοπάτι w, $\forall\, j \geq 0$ $w^j \models \phi \vee \neg\psi$

$M,s \models \neg\mathbf{F}(\neg\phi \wedge \psi)$ αν και μόνο αν για κάθε μονοπάτι w, $w \models \neg\mathbf{F}(\neg\phi \wedge \psi)$
αν και μόνο αν για κάθε μονοπάτι w, δεν ισχύει $w \models \mathbf{F}(\neg\phi \wedge \psi)$
αν και μόνο αν για κάθε μονοπάτι w, δεν ισχύει ότι υπάρχει $j \geq 0$ τ.ω. $w^j \models (\neg\phi \wedge \psi)$
αν και μόνο αν για κάθε μονοπάτι w, δεν ισχύει ότι υπάρχει $j \geq 0$ τ.ω. $w^j \models \neg\,(\phi \vee \neg\psi)$
αν και μόνο αν για κάθε μονοπάτι w, $\forall\, j \geq 0$ δεν ισχύει $w^j \models \neg\,(\phi \vee \neg\psi)$
αν και μόνο αν για κάθε μονοπάτι w, $\forall\, j \geq 0$ ισχύει $w^j \models (\phi \vee \neg\psi)$

iv. $\mathbf{FG}\,\phi \rightarrow \mathbf{GF}\,\psi \equiv \mathbf{G}\,(\phi\ \mathbf{U}\ (\psi \vee \neg\phi)))$

Έστω δομή M και w οποιοδήποτε μονοπάτι της δομής. Θα δείξουμε ότι

$w \models \mathbf{FG}\,\phi \rightarrow \mathbf{GF}\,\psi$ αν και μόνο αν $w \models \mathbf{G}\,(\phi\ \mathbf{U}\ (\psi \vee \neg\phi))$

$w \models \mathbf{FG}\, \phi \rightarrow \mathbf{GF}\, \psi$ αν και μόνο αν αν υπάρχει $i \geq 0$ τέτοιο ώστε $\forall j \geq i$, $w^j \models \phi$
τότε για κάθε $k \geq 0$, υπάρχει $l \geq k$, $w^l \models \phi$

αν και μόνο αν είτε δεν υπάρχει $i \geq 0$ τέτοιο ώστε $\forall\, j \geq i$, $w^j \models \phi$
είτε υπάρχει $i \geq 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $j \geq i$, $w^j \models \phi$
και για κάθε $k \geq 0$, υπάρχει $l \geq k$, $w^l \models \phi$

αν και μόνο αν είτε για κάθε $i \geq 0$ υπάρχει $j \geq i$, $w^j \models \neg\phi$
είτε για κάθε $m < i$, $\exists n \geq m$ τέτοιο ώστε $w^n \models \neg\phi \vee \psi$
και για κάθε $m \leq k < n$ $w^k \models \phi$
για κάθε $m \geq i$ υπάρχει $n \geq m$ τέτοιο ώστε $w^n \models \psi$
και για κάθε $m \leq k < n$ $w^k \models \phi$

αν και μόνο αν είτε για κάθε $i \geq 0$ υπάρχει $j \geq i$, $w^j \models \neg\phi$
και για κάθε $i \leq k < j$ $w^k \models \phi$
είτε για κάθε m $\exists n \geq m$ τέτοιο ώστε $w^n \models \neg\phi \vee \psi$
και για κάθε $m \leq k < n$ $w^k \models \phi$

αν και μόνο αν είτε $w \models \mathbf{G}\,(\phi\ \mathbf{U}\ (\psi \vee \neg\phi))$
είτε $w \models \mathbf{G}\,(\phi\ \mathbf{U}\ (\psi \vee \neg\phi))$

αν και μόνο αν $w \models \mathbf{G}\,(\phi\ \mathbf{U}\ (\psi \vee \neg\phi))$

Άσκηση 5

(α) Δίκαια μονοπάτια της δομής είναι όλα εκτός από τον κύκλο 4444444….

(β) (i) Δεν ισχύει όπως φαίνεται στο μονοπάτι 45666666…
(ii) Δεν ισχύει όπως φαίνεται στο μονοπάτι 12121212…
(iii) Η ιδιότητα ικανοποιείται αφού κάθε μονοπάτι παραβιάζει την συνθήκη X $\neg$q.
(iv) Δεν ισχύει όπως φαίνεται στο μονοπάτι 121212…
(v) Δεν ισχύει όπως φαίνεται στο μονοπάτι 121212…