

## Ασκήσεις Επανάληψης – Λύσεις

### Άσκηση 1

(α) Κανένα πιρούνι δεν χρησιμοποιείται ποτέ από περισσότερους από ένα φιλόσοφους.

$$AG [\neg (l_0 \wedge r_2) \wedge \neg (l_1 \wedge r_0) \wedge \neg (l_2 \wedge r_1)]$$

(β) Ο φιλόσοφος  $i$  θα φάει τουλάχιστον μια φορά.

$$AF (l_i \wedge r_i)$$

(γ) Το σύστημα των φιλοσόφων δεν θα φτάσει ποτέ σε αδιέξοδο (deadlock).

Δείχνουμε ότι οποιαδήποτε ανάθεση πιρουνιών και αν υπάρχει στο μέλλον θα αλλάξει. Οι τρεις τελείες αναφέρονται στις διατάξεις που δεν παραθέτονται στη λύση.

$$AG (l_0 \wedge l_1 \wedge l_2 \rightarrow AF \neg (l_0 \wedge l_1 \wedge l_2) \\ \wedge l_0 \wedge r_0 \wedge r_1 \rightarrow AF \neg (l_0 \wedge r_0 \wedge r_1) \\ \wedge \dots)$$

(δ) Ο φιλόσοφος 1 θα φάει ακριβώς μια φορά.

$$E [\neg (l_0 \wedge r_0) \cup [(l_0 \wedge r_0) \wedge E ((l_0 \wedge r_0) \cup (\neg (l_0 \wedge r_0) \wedge EG \neg (l_0 \wedge r_0)))]]$$

### Άσκηση 2

(α) (i) Η ιδιότητα  $\varphi \mathbf{TX} \psi$  ορίζεται ως η ιδιότητα που εκφράζει ότι «την επόμενη φορά που ισχύει η ιδιότητα  $\psi$  ισχύει ταυτόχρονα και η ιδιότητα  $\varphi$ ». Επομένως μια δομή  $M$  και κατάσταση  $s$  ικανοποιούν  $M, s \models \varphi \mathbf{TX} \psi$  αν για κάθε μονοπάτι  $w$  που ξεκινά από την  $s$  υπάρχει  $j \geq 1$  τέτοιο ώστε για κάθε  $1 < i < j$ ,  $w[i] \models \neg \varphi$  και  $w[j] \models \varphi \wedge \psi$ . Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η ιδιότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την

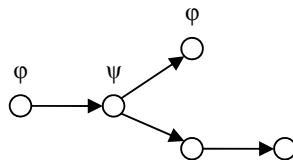
$$AX [A(\neg \psi \cup \varphi \wedge \psi)]$$

(ii) Η ιδιότητα  $\varphi \mathbf{PI} \psi$  ορίζεται ως την ιδιότητα που εκφράζει ότι «αν υπάρχει κάποια μελλοντική στιγμή κατά την οποία ισχύει η ιδιότητα  $\varphi$  τότε προηγείται κάποια κατάσταση όπου αληθεύει η ιδιότητα  $\psi$ ». Επομένως μια δομή  $M$  και κατάσταση  $s$  ικανοποιούν  $M, s \models \varphi \mathbf{PI} \psi$  αν δεν υπάρχει μονοπάτι  $w$  που ξεκινά από την  $s$  για το οποίο υπάρχει  $i$  τέτοιο ώστε  $w[i] \models \varphi$  και για κάθε  $0 \leq k < j$ ,  $w^k \models \neg \psi$ . Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η ιδιότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$\neg E (\neg \psi \cup \varphi)$$

(β) (i)  $EG (\varphi \vee \psi)$  και  $EG \varphi \vee EG \psi$

Οι ιδιότητες δεν είναι ισοδύναμες όπως φαίνεται στο πιο κάτω αντιπαράδειγμα



Η δομή ικανοποιεί την ιδιότητα  $EG (\varphi \vee \psi)$  αλλά όχι την  $EG \varphi \vee EG \psi$ .

(ii)  $AG \phi \wedge AG \psi$  και  $AG (\phi \wedge \psi)$

Θα αποδείξουμε ότι οι ιδιότητες είναι ισοδύναμες.

Έστω δομή Kripke  $M$  και κατάσταση  $s$ . Τότε, αν  $M, s \models AG \phi \wedge AG \psi$ , ισχύει ότι  $M, s \models AG \phi$  και  $M, s \models AG \psi$ . Επομένως για κάθε μονοπάτι  $w$  που ξεκινά από την  $s$  και κάθε  $j \geq 0$ ,  $M, w[j] \models \phi$  και  $M, w[j] \models \psi$ . Αυτό συνεπάγεται ότι  $M, w[j] \models \phi \wedge \psi$  και επομένως  $M, s \models AG (\phi \wedge \psi)$ . Παρόμοια, αν  $M, s \models AG (\phi \wedge \psi)$  ισχύει και ότι  $M, s \models AG \phi \wedge AG \psi$  και το ζητούμενο έπεται.

### Άσκηση 3

(α) Οι διεργασίες  $a.t.Nil$  και  $t.a.Nil$  είναι ασθενώς ισοδύναμες. Ασθενής ισοδυναμία που τις συνδέει είναι η

$$R = \{(a.t.Nil, t.a.Nil), (t.Nil, Nil), (a.t.Nil, a.Nil), (Nil, Nil)\}$$

(β) Οι διεργασίες  $t.a.A + b.B$  και  $t.(a.A + b.B)$  δεν είναι ισοδύναμες. Συγκεκριμένα η πρώτη διεργασία έχει την μετάβαση

$$t.a.A + b.B \xrightarrow{\tau} a.A$$

την οποία η δεύτερη διεργασία δεν μπορεί να μιμηθεί.

(γ)  $t.Nil + (a.Nil \mid \bar{a}.Nil) \setminus \{a,b\}$  και  $t.Nil$

Οι διεργασίες είναι ισχυρά (και επομένως και ασθενώς) ισοδύναμες. Ισοδυναμία που τις συνδέει είναι η

$$R = \{(t.Nil + (a.Nil \mid \bar{a}.Nil) \setminus \{a,b\}, t.Nil), (Nil, Nil), (Nil \mid Nil) \setminus \{a,b\}, Nil)\}$$

(δ)  $a.(t.Nil + b.B)$  και  $a.Nil + a.b.Nil$

Οι διεργασίες δεν είναι ισοδύναμες. Συγκεκριμένα η πρώτη διεργασία έχει την μετάβαση

$$a.(t.Nil + b.B) \xrightarrow{a} t.Nil + b.B$$

την οποία η δεύτερη διεργασία δεν μπορεί να μιμηθεί αφού οι δύο μεταβάσεις της με ενέργεια  $a$  οδηγούν στις καταστάσεις  $Nil$  και  $b.Nil$  και καμιά από τις δύο δεν είναι ισοδύναμη με την  $t.Nil + b.B$ .

### Άσκηση 4

(α) Το αυτόματο  $A_1$  περιέχει το πιο κάτω μονοπάτι το οποίο παρουσιάζει συμπεριφορά Zeno.

$$\langle l_0, v_0 \rangle \xrightarrow{1} \langle l_0, v_1 \rangle \xrightarrow{*} \langle l_2, v_2 \rangle \xrightarrow{*} \langle l_2, v_3 \rangle \xrightarrow{*} \langle l_2, v_3 \rangle \xrightarrow{*} \langle l_2, v_2 \rangle \xrightarrow{*} \dots$$

όπου

$$\begin{array}{cccc} v_0(x_1) = 0 & v_1(x_1) = 1 & v_2(x_1) = 1 & v_3(x_1) = 0 \\ v_0(x_2) = 0 & v_1(x_2) = 1 & v_2(x_2) = 0 & v_{3\sigma\sigma}(x_2) = 0 \end{array}$$

Προφανώς το πιο πάνω μονοπάτι αν και μη πεπερασμένο έχει πεπερασμένη διάρκεια χρόνου.

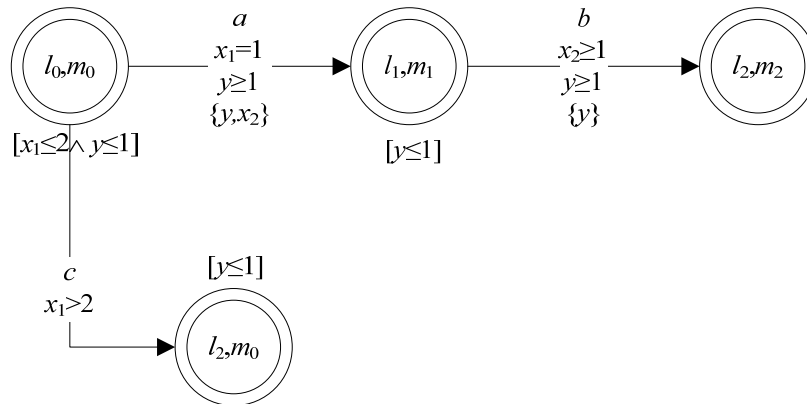
(β) Ναι, το αυτόματο περιέχει μονοπάτι που οδηγεί σε χρονικό αδιέξοδο όπως φαίνεται πιο κάτω:

$$\langle l_0, v_0 \rangle \xrightarrow{2} \langle l_0, v_1 \rangle \rightarrow$$

όπου

$$\begin{array}{cc} v_0(x_1) = 0 & v_1(x_1) = 2 \\ v_0(x_2) = 0 & v_1(x_2) = 2 \end{array}$$

(γ) Ακολουθεί η παράλληλη σύνθεση  $A_1 \parallel A_2$ .



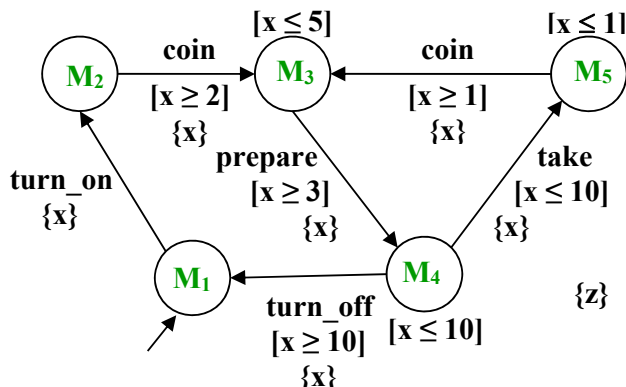
**Άσκηση 5**

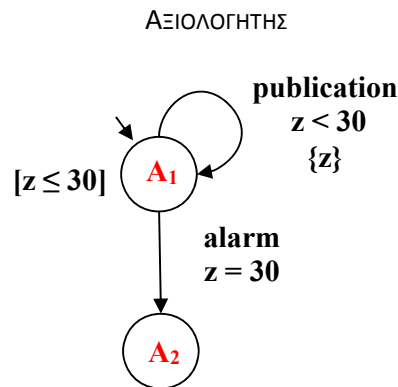
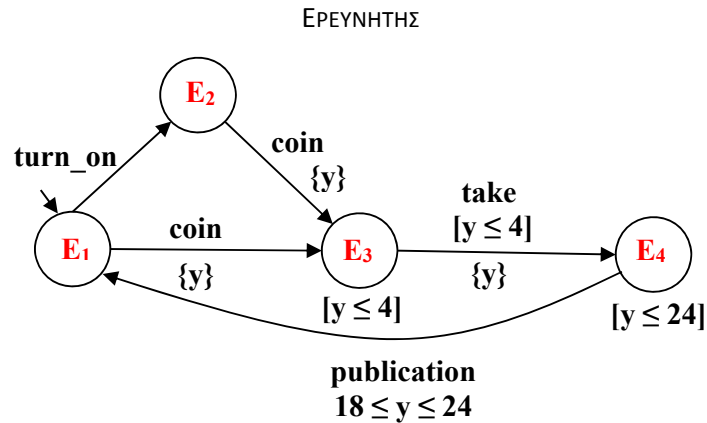
Παραλείπεται.

**Άσκηση 6**

Ακολουθούν οι περιγραφές των οντοτήτων του συστήματος ως χρονικά αυτόματα.

ΜΗΧΑΝΗ ΚΑΦΕ





Υποθέτουμε ότι οι καταστάσεις των χρονικών αυτομάτων συνδέονται με ατομικές προτάσεις όπως φαίνεται πιο κάτω.

Label( $E_1$ ) = {pub}

Label( $E_3$ ) = {coin}

Label( $E_4$ ) = {take}

Label( $M_1$ ) = {off}

Label( $M_2$ ) = {on}

- (i) Η απόσταση χρόνου ανάμεσα σε δύο διαδοχικές δημοσιεύσεις δυνατόν να είναι μεγαλύτερη από 30 δευτερόλεπτα.

$$EF [\neg \text{pub} \wedge AG^{<30} \neg \text{pub}]$$

- (ii) Αν ο ερευνητής τοποθετήσει ένα νόμισμα στη μηχανή καφέ τότε θα λάβει τον καφέ του μέσα σε ακριβώς 6 μονάδες χρόνου.

$$AG (\text{coin} \rightarrow AF^{=6} \text{take})$$

- (iii) Η μηχανή καφέ δεν μπορεί να είναι απενεργοποιημένη για περισσότερο από 40 μονάδες χρόνου.

$$AG (\text{off} \rightarrow AF^{\leq 40} \text{on})$$

- (iv) Η πάροδος χρόνου από τη στιγμή της τοποθεσίας νομίσματος και της παραλαβής καφέ δεν πρέπει να ξεπερνά τις 7 μονάδες χρόνου.

$AG (\text{coin} \rightarrow AF^{\leq 7} \text{take})$

### **Άσκηση 7**

Παραλείπεται.