Φροντιστήριο 2 – Σκελετοί Λύσεων

Λύση Άσκησης 1

a. Αν πατηθεί κάποιο κουμπί στον τρίτο όροφο, τότε ο ανελκυστήρας θα μετακινηθεί σε αυτόν τον όροφο.

$$\mathbf{G}\ (\ pressup_3 \vee pressdown_3 \rightarrow \mathbf{F}\ at_3\ )$$

b. Ο ανελκυστήρας δεν μπορεί να βρίσκεται ταυτόχρονα στον πρώτο και στον δεύτερο όροφο.

$$\mathbf{G}\ (\neg\ (at_1 \wedge\ at_2))$$

c. Αν ο ανελκυστήρας βρίσκεται σε κίνηση, τότε η πόρτα του πρέπει να είναι κλειστή.

$$\mathbf{G}\ (\neg stop \rightarrow \neg open)$$

d. Αν κανένα κουμπί δεν είναι πατημένο και ο ανελκυστήρας βρίσκεται στον τέταρτο όροφο, τότε θα παραμείνει στον όροφο αυτό μέχρις ότου να πατηθεί κάποιο κουμπί.

$$\mathbf{G}\ [\ at_4 \wedge \neg\ (\vee_{1\leq i\leq n}\ memory\_up_i) \wedge \neg\ (\vee_{1\leq i\leq n}\ memory\_down_i) \wedge \neg\ (\vee_{1\leq i\leq n}\ memory\_press_i)\ ]$$
$$\rightarrow [\ (\mathrm{at}_4 \wedge \mathrm{stop})\ \mathbf{U}\ ((\vee_{1\leq i\leq n}\ press\_up_i) \vee (\vee_{1\leq i\leq n}\ press\_down_i) \vee (\vee_{1\leq i\leq n}\ press_i))\ ]$$

Το πιο πάνω προϋποθέτει πως κάθε πάτημα κουμπιού παραμένει στην μνήμη του ανελκυστήρα μέχρις ότου το σχετικό αίτημα να εξυπηρετηθεί. Πως μπορεί να διατυπωθεί αυτή η ιδιότητα;

e. Κάθε φορά που ο ανελκυστήρας εγκλωβίζεται ανάμεσα σε δύο ορόφους, ο συναγερμός θα ηχεί μέχρις ότου ο ανελκυστήρας να βρεθεί ξανά σε κίνηση.

$$\mathbf{G}\ [(((\vee_{1\leq i<n}\ between_i) \wedge stop) \rightarrow (alarm\ \mathbf{U}\ (go\_up \vee go\_down)))\ ]$$

Λύση Άσκησης 2

1. **F** y	Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 2, 3, και 4.
2. **G** y	Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση.
3. **G F** y	Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 2, 3, και 4.
4. **F** g	Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1 και 3.
5. **G** g	Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση.
6. **G** ¬ b	Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση.
7. b **U** ¬ b	Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 2, 3, και 4.
8. ¬ b **U F** b	Ικανοποιείται στην κατάσταση 4.
9. g **U** (y **U** r)	Ικανοποιείται στην κατάσταση 1.
10. g **U** ¬y	Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 3, και 4.
11. **G** (g **U** (y ∧ **F** b ∧ **F** r))	Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση.
12. **G** (g ⇒ **X** y)	Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 2, 3, και 4.

Λύση Άσκησης 3

1. $\mathbf{G}\, p \Leftrightarrow \neg \mathbf{F} \neg p$

   Αληθές από τον ορισμό του τελεστή **G.**

2. $\mathbf{X}\,\mathbf{F}\, p \Leftrightarrow \mathbf{F}\,\mathbf{X}\, p$

   Έστω μονοπάτι s. Τότε

   $s \models \mathbf{X}\,\mathbf{F}\, p$ αν και μόνο αν $s^1 \models \mathbf{F}\, p$
   αν και μόνο αν $s^1 \models \mathbf{true}\ \mathbf{U}\ p$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 1$ τέτοιο ώστε $s^j \models p$ και για κάθε $1 \leq k < j$, $s^k \models \text{true}$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 1$ τέτοιο ώστε $s^j \models p$

   και

   $s \models \mathbf{F}\,\mathbf{X}\, p$ αν και μόνο αν $s \models \mathbf{true}\ \mathbf{U}\ \mathbf{X}\, p$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models \mathbf{X}\, p$ και για κάθε $0 \leq k < j$ $s^k \models \text{true}$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models \mathbf{X}\, p$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $(s^j)^1 \models p$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^{j+1} \models p$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 1$ τέτοιο ώστε $s^j \models p$

   Προφανώς οι δύο ιδιότητες ικανοποιούνται ακριβώς από τα ίδια μονοπάτια και επομένως η ισοδυναμία ισχύει.

3. $(\mathbf{F}\,\mathbf{G}\, p) \wedge (\mathbf{F}\,\mathbf{G}\, q) \Leftrightarrow \mathbf{F}\,(\mathbf{G}\, p \wedge \mathbf{G}\, q)$

   Έστω μονοπάτι s. Τότε

   $s \models (\mathbf{F}\,\mathbf{G}\, p) \wedge (\mathbf{F}\,\mathbf{G}\, q)$
   αν και μόνο αν $s \models \mathbf{F}\,\mathbf{G}\, p$ και $s \models \mathbf{F}\,\mathbf{G}\, q$
   αν και μόνο αν υπάρχει $i \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^i \models \mathbf{G}\, p$ και υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models \mathbf{G}\, q$
   αν και μόνο αν υπάρχει $i \geq 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $k \geq 0$ $s^{i+k} \models p$ και υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $k \geq 0$ $s^{j+k} \models q$
   αν και μόνο αν υπάρχει $n \geq 0$ ($n = \max(i,j)$) τέτοιο ώστε για κάθε $k \geq 0$ $s^{n+k} \models p$ και για κάθε $k \geq 0$ $s^{n+k} \models q$
   αν και μόνο αν υπάρχει $n \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^n \models \mathbf{G}\, p$ και $s^n \models \mathbf{G}\, q$
   αν και μόνο αν υπάρχει $i \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^i \models \mathbf{G}\, p \wedge \mathbf{G}\, q$
   αν και μόνο αν $s \models \mathbf{F}\,(\mathbf{G}\, p \wedge \mathbf{G}\, q)$

   Προφανώς οι δύο ιδιότητες ικανοποιούνται ακριβώς από τα ίδια μονοπάτια και επομένως η ισοδυναμία ισχύει.

4. (p **U** q) **U** q $\Leftrightarrow$ p **U** q

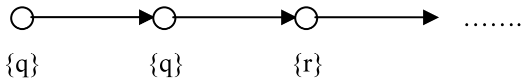
Θα θεωρήσουμε τις δύο κατευθύνσεις ξεχωριστά.

Έστω μονοπάτι s, τέτοιο ώστε, s $\models$ (p **U** q) **U** q. Τότε έχουμε,
υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$ και για κάθε $0 \leq k < j$, $s^k \models$ (p **U** q).
Έστω i είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο $s^i \models q$. Τότε
$s^i \models q$ και για κάθε $0 \leq k < i$, $s^k \models$ (p **U** q),
δηλαδή,
$s^i \models q$ και για κάθε $0 \leq k < i$, υπάρχει $m \geq k$ τέτοιο ώστε $s^m \models q$ (*)
και για κάθε $0 \leq n < m$ $s^n \models p$.
Αφού το i είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο $s^i \models q$, από το (*) συμπεραίνουμε
$s^i \models q$ και για κάθε $0 \leq n < i$, $s^n \models p$
Επομένως,
s $\models$ p **U** q.

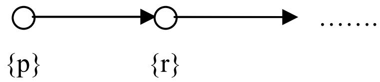
Για την αντίθετη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι για κάποιο μονοπάτι s ισχύει ότι s $\models$ p **U** q. Τότε έχουμε:
υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$ και για κάθε $0 \leq k < j$, $s^k \models p$.
Επιπλέον ισχύει ότι
υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$ και για κάθε $0 \leq k < j$, ($\exists m = j$ τέτοιο ώστε $s^m \models q$ και για κάθε $k \leq n < m$, $s^n \models p$).
Συνεπώς
υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$ και για κάθε $0 \leq k < j$ $s^k \models$ p U q
που συνεπάγεται ότι
s $\models$ (p **U** q) **U** q
και το ζητούμενο έπεται.

5. (p **U** q) $\wedge$ (q **U** r) $\equiv$ (p **U** r)

Η ισοδυναμία δεν ισχύει προς καμιά κατεύθυνση. Η πιο κάτω δομή ικανοποιεί την ιδιότητα (p **U** q) $\wedge$ (q **U** r) αλλά όχι την (p **U** r).

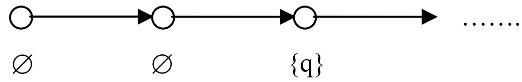


Η πιο κάτω δομή δεν ικανοποιεί την ιδιότητα (p **U** q) $\wedge$ (q **U** r) αλλά ικανοποιεί την (p **U** r)



6. **G** p $\vee$ **F** q $\equiv$ (**G** p) $\vee$ (p **U** q)

Η ισοδυναμία δεν ισχύει προς την κατεύθυνση $\Rightarrow$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω αντιπαράδειγμα.



Η ισοδυναμία ισχύει προς την κατεύθυνση $\Leftarrow$. Απόδειξη:

Έστω μονοπάτι s. Τότε

Αν $s \models (\mathbf{G}\ p) \vee (p\ \mathbf{U}\ q)$ τότε $s \models \mathbf{G}\ p$ ή $s \models (p\ \mathbf{U}\ q)$

τότε $s \models \mathbf{G}\ p$ ή υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$ και για κάθε $0 \leq k < j$, $s^k \models p$

τότε $s \models \mathbf{G}\ p$ ή υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$

τότε $s \models \mathbf{G}\ p$ ή υπάρχει $s \models F\ q$

τότε $s \models \mathbf{G}\ p \vee F\ q$

Επομένως το ζητούμενο έπεται.