ΕΠΛ 211:
Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητας

Διάλεξη 3: Ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα (DFA)

Τι θα κάνουμε σήμερα…

- Εισαγωγή στα Ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα
- Τυπικός Ορισμός Ντετερμινιστικών Πεπερασμένων Αυτόματων (1.1.1)
- Σχεδιασμός Ντετερμινιστικού Πεπερασμένου Αυτόματου (1.1.4)
- Κανονικές Πράξεις (1.1.5)

Πεπερασμένα αυτόματα

- Απλούστερο δυνατό υπολογιστικό μοντέλο
  - Εξαιρετικά περιορισμένη μνήμη

- Έχουμε στις μέρες μας υπολογιστικά συστήματα τέτοιου τύπου;
  - Αλληλεπιδρούμε καθημερινός με τέτοια συστήματα

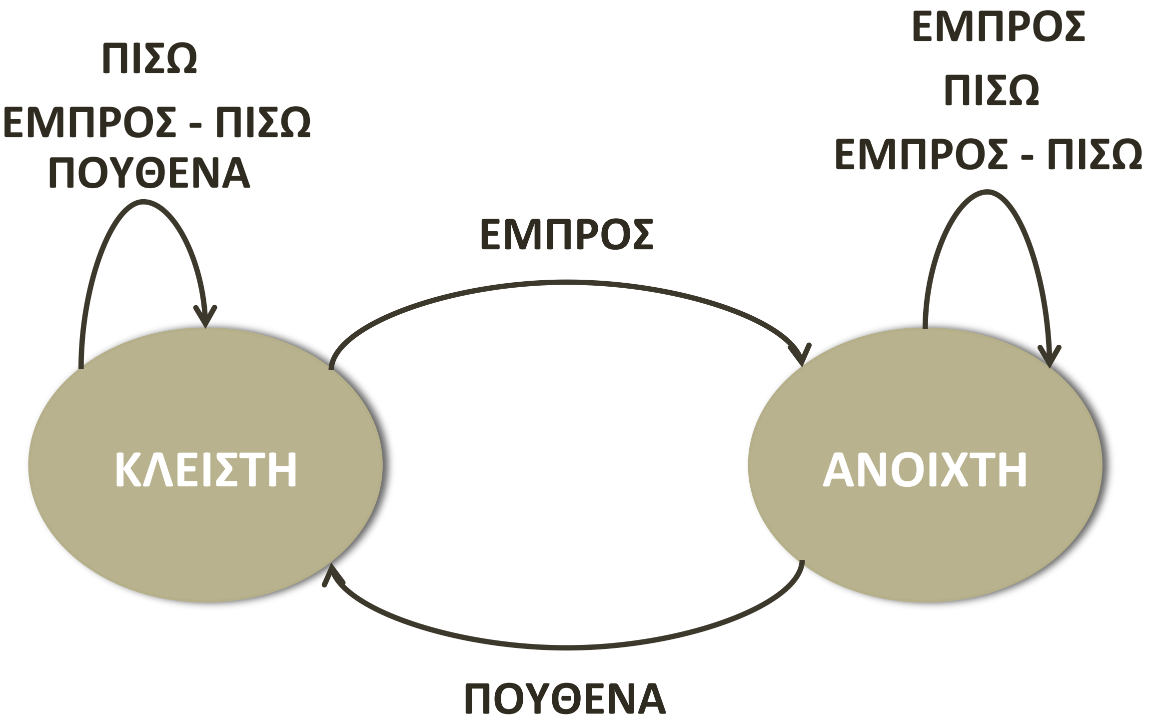
Παράδειγμα – Αυτόματη Πόρτα

Τέσσερα Σήματα:

- **«ΕΜΠΡΟΣ»: κάποιος στέκεται στο μπροστινό πατάκι**
- **«ΠΙΣΩ»: κάποιος στέκεται στο πίσω πατάκι**
- **«ΕΜΠΡΟΣ-ΠΙΣΩ»: έχει κάποιο άτομο και στο μπροστά και το πίσω πατάκι**
- **«ΠΟΥΘΕΝΑ»: δεν υπάρχει κανένας στα πατάκια**

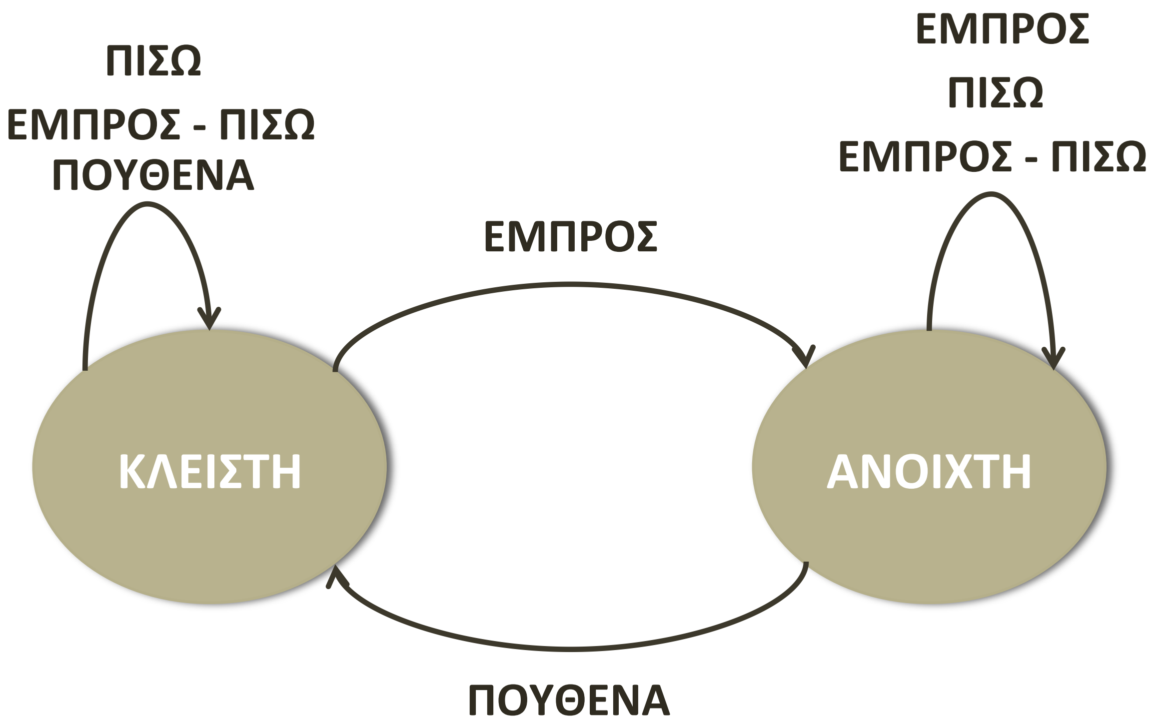
Παράδειγμα – Αυτόματη Πόρτα

- Καταστάσεις πόρτας
  - «ΑΝΟΙΧΤΗ»
  - «ΚΛΕΙΣΤΗ»



Διάγραμμα Καταστάσεων Αυτόματης Πόρτας

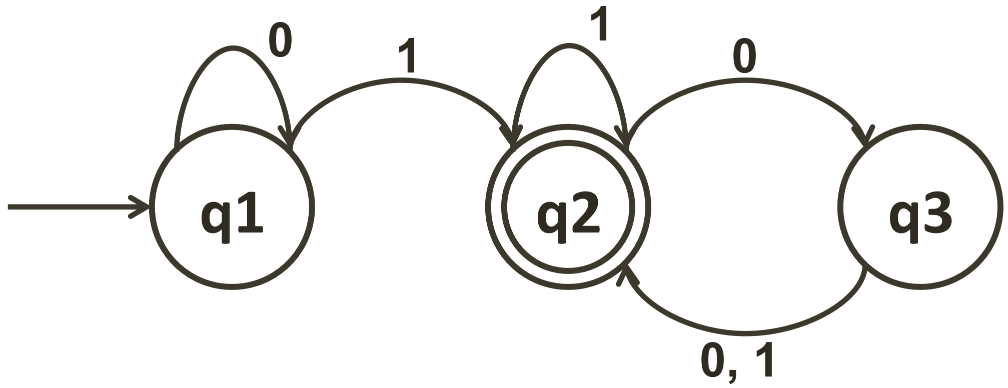
Παράδειγμα – Αυτόματη Πόρτα



	ΠΟΥΘΕΝΑ	ΕΜΠΡΟΣ	ΠΙΣΩ	ΕΜΠΡΟΣ-ΠΙΣΩ
ΚΛΕΙΣΤΗ	ΚΛΕΙΣΤΗ	ΑΝΟΙΧΤΗ	ΚΛΕΙΣΤΗ	ΚΛΕΙΣΤΗ
ΑΝΟΙΧΤΗ	ΚΛΕΙΣΤΗ	ΑΝΟΙΧΤΗ	ΑΝΟΙΧΤΗ	ΑΝΟΙΧΤΗ

Πίνακας Μεταβάσεων Αυτόματης Πόρτας

Διάγραμμα Καταστάσεων



- Διάγραμμα τριών **καταστάσεων** {q1,q2,q3}
- **Εναρκτήρια κατάσταση** υποδεικνύεται με βέλος
- **Τελική κατάσταση** ή **κατάσταση υποδοχής** η q2
- **Μεταβάσεις** από την μια κατάσταση στην άλλη απεικονίζονται με βέλη.
- **Έξοδος αποδοχή** ή **απόρριψη**: αν μετά την επεξεργασία δοθέντος λέξης φτάσουμε σε τελική τότε αποδεχόμαστε
  - π.χ. Πως τρέχει το αυτόματο στην λέξη 1101;

Τυπικός Ορισμός του DFA

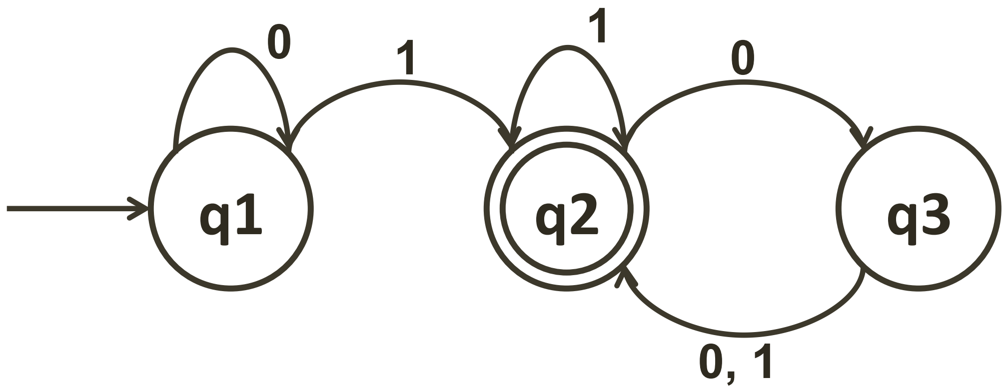
Ορισμός

Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο ***είναι μια πεντάδα*** $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

1. **Q = *πεπερασμένο* *σύνολο καταστάσεων***
2. Σ **= *αλφάβητο***
3. ***Συνάρτηση μετάβασης*** $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

   Όταν το αυτόματο είναι στην κατάσταση $q \in Q$ ***και διαβάσει το σύμβολο*** $a \in \Sigma$ ***μεταβιβάζεται στην κατάσταση*** $q' \in Q$***, π.χ.*** **δ (q,α)=q'**
4. $q_o \in Q$ **= *αρχική κατάσταση***
5. $F \subseteq Q$ **= *τελικές καταστάσεις***

Τυπική Περιγραφή Αυτομάτου



- $M_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  - Q = {q1, q2, q3}
  - Σ = {0, 1}
  - Η συνάρτηση μεταβάσεων δ *περιγράφεται από τον πίνακα*

	0	1
q1	q2	q2
q2	q3	q2
q3	q2	q2

  - q1 η εναρκτήρια κατάσταση
  - F = {q2}

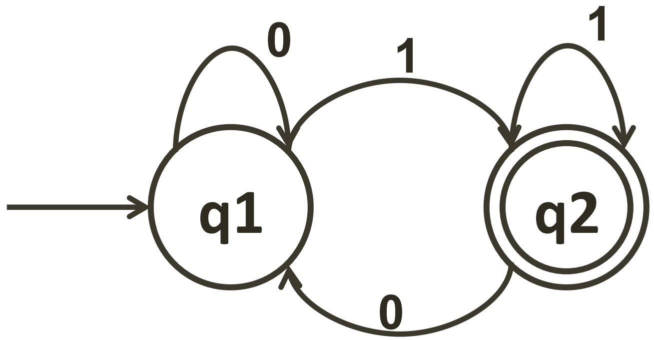
Ορολογία

- Εάν A είναι το σύνολο όλων των λέξεων που αποδέχεται το αυτόματο M, λέμε ότι το A είναι η **γλώσσα του M** και γράφουμε:

$$L(M) = A$$

- Το M **αναγνωρίζει** την A
  - Κάθε αυτόματο αποδέχεται πολλές λέξεις αλλά αναγνωρίζει μια μόνο γλώσσα
- Τι γλώσσα δέχεται το M1;
  - A1={w | η w περιέχει τουλάχιστον ένα σύμβολο 1 και το τελευταίο 1 ακολουθείται από άρτιο αριθμό 0}
  - L(M1) = A1

Παράδειγμα

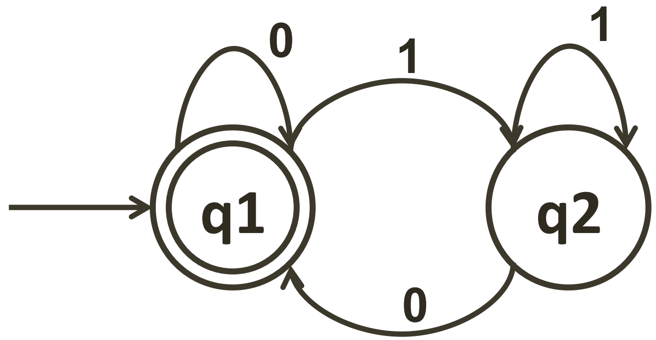


- Πεπερασμένο Αυτόματο M2=({q1,q2}, {0, 1}, δ, q1, {q2})

	0	1
q1	q1	q2
q2	q1	q2

- L(M2)?
  - Δοκιμάζουμε κάποιες λέξεις εισόδου
    - 0, 1, 001, 1010, 100111
  - L(M2) = {w | w τελειώνει σε 1}

Παράδειγμα



- Τι γλώσσα αναγνωρίζει το αυτόματο M3=({q1, q2}, {0,1}, δ, q1, {q1})
  - L(M3)={w | w η κενή λέξη ή τελειώνει σε 0}

Ορισμός του υπολογισμού

- Το αυτόματο M **αποδέχεται μια λέξη** w εάν:
  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  $w = w_1 w_2 \dots w_n, \forall w_i \in \Sigma$
  και υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $r_0 r_1 \dots r_n, \forall r_i \in Q$
  που να ικανοποιεί τις συνθήκες:
  1. $r_0 = q_0$
  2. $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}, \text{ for } i = 0, \dots, n-1$, και
  3. $r_n \in F$

- Το αυτόματο M **αναγνωρίζει τη γλώσσα** A εάν:
  A = {w | το M αποδέχεται την w}

Κανονική Γλώσσα

Ορισμός:
Μια γλώσσα λέγεται κανονική εάν υπάρχει πεπερασμένο αυτόματο που να την αναγνωρίζει.

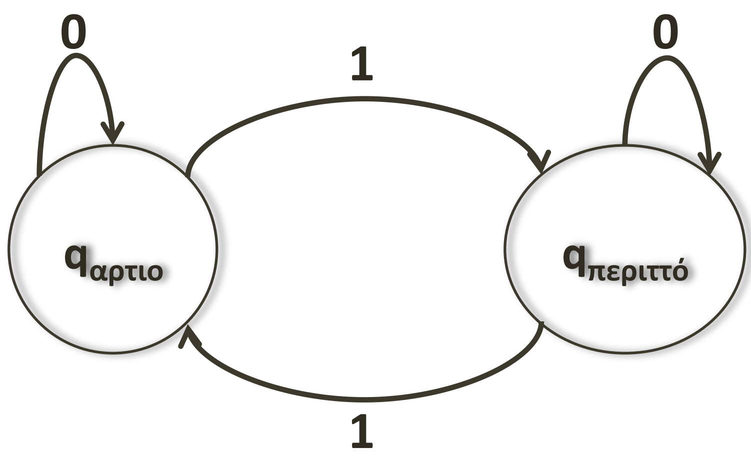
Σχεδίαση Αυτομάτων

- Πρόβλημα: Δοθέντος μιας γλώσσας σχεδιάστε ένα αυτόματο που να την αναγνωρίζει.

- Παράδειγμα 1: A = {w | w έχει άρτιο αριθμό από 1}
- Βήμα 1: Καθορισμός καταστάσεων
  - Έλεγχος κάθε συμβόλου και εάν το τμήμα της λέξης που εξετάστηκε ανήκει ή όχι στη γλώσσα
  - Καθορισμός πληροφοριών που πρέπει να θυμόμαστε:
    1. είτε ο αριθμός των 1 που διαβάσαμε είναι άρτιος
    2. είτε ο αριθμός των 1 που διαβάσαμε είναι περιττός
  - Αποδίδουμε σε κάθε περίπτωση μια κατάσταση

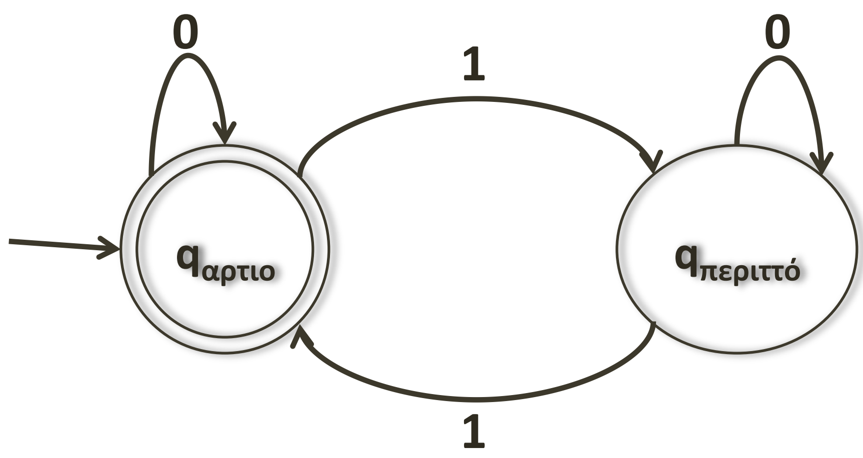
Σχεδίαση Αυτομάτων

- Βήμα 2: Καθορισμός Μεταβάσεων
  - Βάση το πώς πρέπει να μετακινηθούμε μετά την ανάγνωση ενός συμβόλου
    - Ανάγνωση 0: αριθμός 1 δεν αλλάζει άρα μένουμε στην ίδια κατάσταση
    - Ανάγνωση 1: αριθμός 1 αλλάζει άρα αν είμαστε στο $q_{άρτιο}$ πάμε $q_{περιττό}$ και ανάποδα



Σχεδίαση Αυτομάτων

- Βήμα 3: Καθορισμός εναρκτήριας κατάστασης
  - Αντιστοιχεί στην περίπτωση της λέξης με 0 σύμβολα.
  - Εναρκτήρια το $q_{άρτιο}$ αφού το πλήθος 0 των 1 είναι άρτιο
- Βήμα 4: Καθορισμός Τελικών Καταστάσεων
  - Στην περίπτωσή μας το $q_{άρτιο}$



Πράξεις σε Κανονικές Γλώσσες

- Έστω δυο γλώσσες A και B:
- **Ένωση**: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ or } x \in B\}$
- **Συναρμογή (Σύμπτυξη)**: $AB = \{xy | x \in A \text{ and } y \in B\}$
- **Σώρευση**: $A^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k | k \geq 0 \text{ and } \forall x_i, x_i \in A\}$

Κλειστότητα

Ορισμός:
Ένα σύνολο είναι κλειστό κάτω από μια πράξη, εάν η πράξη αυτή, όταν εκτελείται σε μέλη του συνόλου, επιστρέφει ένα αντικείμενο που ανήκει επίσης στο σύνολο.

- π.χ.
  - Το σύνολο των φυσικών είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό
  - Το σύνολο των φυσικών δεν είναι κλειστό ως προς την διαίρεση
- **Η συλλογή των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς τις κανονικές πράξεις.**

Ερωτήσεις;