Τμήμα Πληροφορικής
Άννα Φιλίππου

Σειρά Προβλημάτων 5

Ημερομηνία Παράδοσης: 04/05/18

<u>Άσκηση 1 [20 μονάδες]</u>

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω γλώσσες είναι διαγνώσιμες.

(α) ({ $\langle G \rangle$ | η G είναι μια ασυμφραστική γραμματική που δεν παράγει καμιά λέξη με μήκος μικρότερο του 2 }

(β) { $\langle M,w \rangle$ | η M είναι μια TM η οποία θα επιχειρήσει να κινήσει την κεφαλή της προς τα αριστερά σε κάποιο σημείο του υπολογισμού της στη λέξη w }

<u>Άσκηση 2 [20 μονάδες]</u>

Για κάθε μια από τις πιο κάτω προτάσεις να αποφασίσετε αν είναι ή όχι αληθής αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α) Η γλώσσα $ΚΕΝΟΤΗΤΑ_{TM}$ (διαφάνεια 9-23) είναι αναγνωρίσιμη.

(β) Η γλώσσα $ΚΕΝΟΤΗΤΑ_{TM}$ (διαφάνεια 9-23) είναι συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη.

(γ) Για κάθε γλώσσα Λ, αν η Λ αποτελεί υποσύνολο της γλώσσας A_{TM} ($Λ \subseteq A_{TM}$) τότε είναι μη διαγνώσιμη.

(δ) Για κάθε γλώσσα Λ, αν η Λ αποτελεί υπερσύνολο της γλώσσας A_{TM} ($Λ \supseteq A_{TM}$) τότε είναι μη διαγνώσιμη.

<u>Άσκηση 3 [30 μονάδες]</u>

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω γλώσσες δεν είναι διαγνώσιμες.

(α) {$\langle M \rangle$ | η M είναι μια TM με δύο ταινίες η οποία κατά τη διάρκεια του υπολογισμού της σε κάποια λέξη θα επιχειρήσει να γράψει το σύμβολο του διαστήματος πάνω σε κάποιο άλλο σύμβολο στη δεύτερη ταινία της }

(β) { $\langle M \rangle$ | η M είναι μια TM η οποία με είσοδο την κενή λέξη κάποια στιγμή θα επιχειρήσει να γράψει στην ταινία της το στοιχείο 0 }

<u>Άσκηση 4 [30 μονάδες]</u>

Μια εταιρεία παραδόσεων διαθέτει δύο φορτηγά και έχει να παραδώσει ένα σύνολο από πακέτα σε ένα αριθμό από διευθύνσεις. Οι παραδόσεις πρέπει να συμπληρωθούν μέσα σε μια μέρα και ο υπεύθυνος παραδόσεων καλείται να δημιουργήσει ένα πλάνο για κάθε οδηγό. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα έχει ως εξής:

Δεδομένο εισόδου: Ένα σύνολο V από τοποθεσίες, ένας πίνακας d[v,u] για κάθε ζεύγος τοποθεσιών $u,v \in V$ ο οποίος αποθηκεύει την απόσταση (ακέραια τιμή) ανάμεσα στις αντίστοιχες τοποθεσίες, ένα σημείο εκκίνησης start και ένας ακέραιος K.

Ζητούμενο: Υπάρχουν δύο κύκλοι που ξεκινούν από την αρχική τοποθεσία start, έτσι ώστε κάθε τοποθεσία $v \in V$ να ανήκει σε τουλάχιστον ένα από τους δύο κύκλους και κάθε κύκλος να έχει μήκος το πολύ K;

(α) Να διατυπώσετε αυτό το πρόβλημα υπό τη μορφή γλώσσας και να δείξετε ότι ανήκει στην κλάση NP.

(β) Να δείξετε ότι η γλώσσα που ορίσατε στο σκέλος (α) είναι NP-πλήρης μέσω αναγωγής από κάποια γνωστή NP-πλήρη γλώσσα.

Άσκηση 5 [20 μονάδες - bonus]

Ένας λογικός τύπος βρίσκεται σε διαζευκτική κανονική μορφή (ΔΚΜ) αν αποτελεί τη διάζευξη ενός συνόλου λεξιγραμμάτων που συνδέονται μεταξύ τους μέσω της πράξης της σύζευξης. Για παράδειγμα ο πιο κάτω λογικός τύπος βρίσκεται σε ΔΚΜ:

$$(\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge c) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c})$$

Το Πρόβλημα ΔΚΜ_ΑΛ ορίζεται ως εξής:

ΔΚΜ_ΑΛ = {⟨φ⟩ | ο φ είναι ένας αληθεύσιμος ΔΚΜ τύπος}

(α) Να δείξετε ότι το πρόβλημα ΔΚΜ_ΑΛ ανήκει στην κλάση P.

(β) Να εντοπίσετε το σφάλμα στην πιο κάτω "απόδειξη" η οποία δείχνει ότι P = NP.

Έστω ότι μας δίνεται ένας τύπος σε 3ΣΚΜ και θέλουμε να δείξουμε ότι είναι αληθεύσιμος. Χρησιμοποιούμε τον κανόνα της επιμεριστικότητας ($a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$) για να λάβουμε ότι

$$\begin{aligned}(\bar{a} \vee b \vee c) \wedge \left(a \vee \bar{b} \vee \bar{c}\right) = {} & (\bar{a} \wedge a) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{c}) \\ & \vee (b \wedge a) \vee (b \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{c}) \\ & \vee (c \wedge a) \vee (c \wedge \bar{b}) \vee (c \wedge \bar{c})\end{aligned}$$

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο από το μέρος (α) για να διαγνώσουμε, σε πολυωνυμικό χρόνο, κατά πόσο ο ΔΚΜ τύπος που έχει προκύψει είναι αληθεύσιμος. Αφού γνωρίζουμε ότι το πρόβλημα 3-SAT είναι NP-πλήρες, συμπεραίνουμε ότι P = NP.