# Σειρά Προβλημάτων 4 – Λύσεις

## Άσκηση 1

*(α) Να διατυπώσετε την τυπική περιγραφή μιας μηχανής Turing (αυθεντικός ορισμός) η οποία να διαγιγνώσκει τη γλώσσα $\{1010^2 10^3 \ldots 10^{n-1}10^n 1 \mid n \geq 1\}$ .*

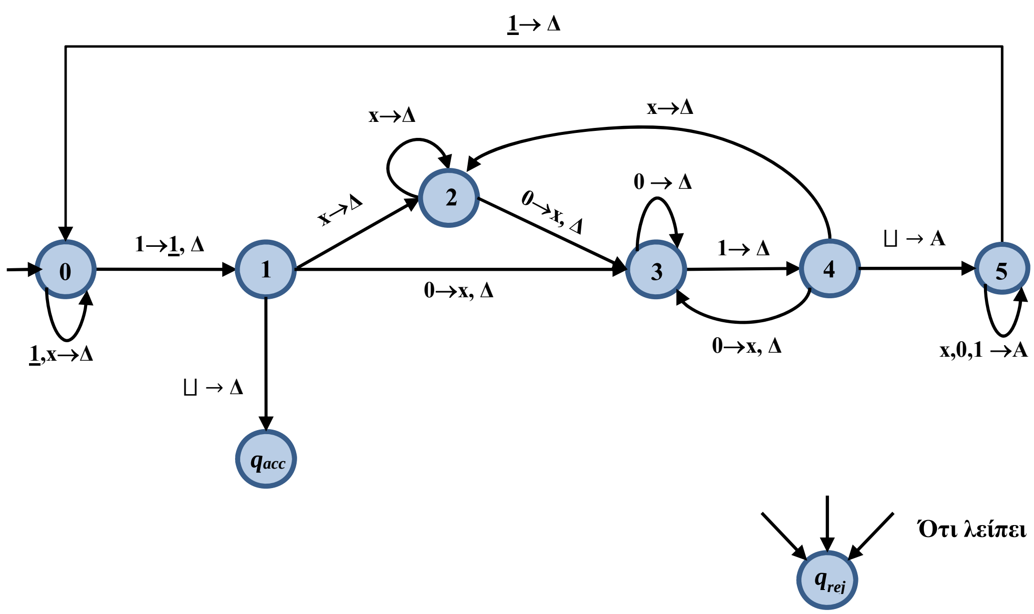
*(β) Να διατυπώσετε την τυπική περιγραφή μιας μηχανής Turing (αυθεντικός ορισμός) η οποία με δεδομένο εισόδου στην ταινία της μια λέξη της μορφής $1^n$ να μετασχηματίζει κατάλληλα το περιεχόμενο της ταινίας έτσι ώστε κατά τον τερματισμό της μηχανής να βρίσκεται στην ταινία η λέξη $1^{n/2}$ αν το n είναι άρτιο και η λέξη $1^{2n}$ αν το n είναι περιττό.*

*Και στις δύο πιο πάνω περιπτώσεις να παρουσιάσετε το αλφάβητο εισόδου και το αλφάβητο ταινίας της μηχανής σας καθώς και το σύστημα μεταβάσεών της, γραφικά, και να εξηγήσετε σύντομα τη λειτουργία της.*

## Λύση

(α) Η ζητούμενη μηχανή Turing μπορεί να διατυπωθεί ως την επτάδα $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ όπου

1. Το σύνολο καταστάσεων Q αποτελείται από τις καταστάσεις που εμφανίζονται στο πιο κάτω σχήμα
2. Το αλφάβητο εισόδου Σ είναι το {0,1}
3. Το αλφάβητο ταινίας Γ είναι το $\Sigma \cup \{0, 1, \underline{1}, x, \sqcup\}$
4. Η *συνάρτηση μετάβασης* δ είναι όπως απεικονίζεται στο πιο κάτω σχήμα
5. $q_0 = 0 \in Q$ είναι η *εναρκτήρια κατάσταση*
6. $q_{acc} \in Q$ είναι η *κατάσταση αποδοχής*
7. $q_{rej} \in Q$ είναι η *κατάσταση απόρριψης*

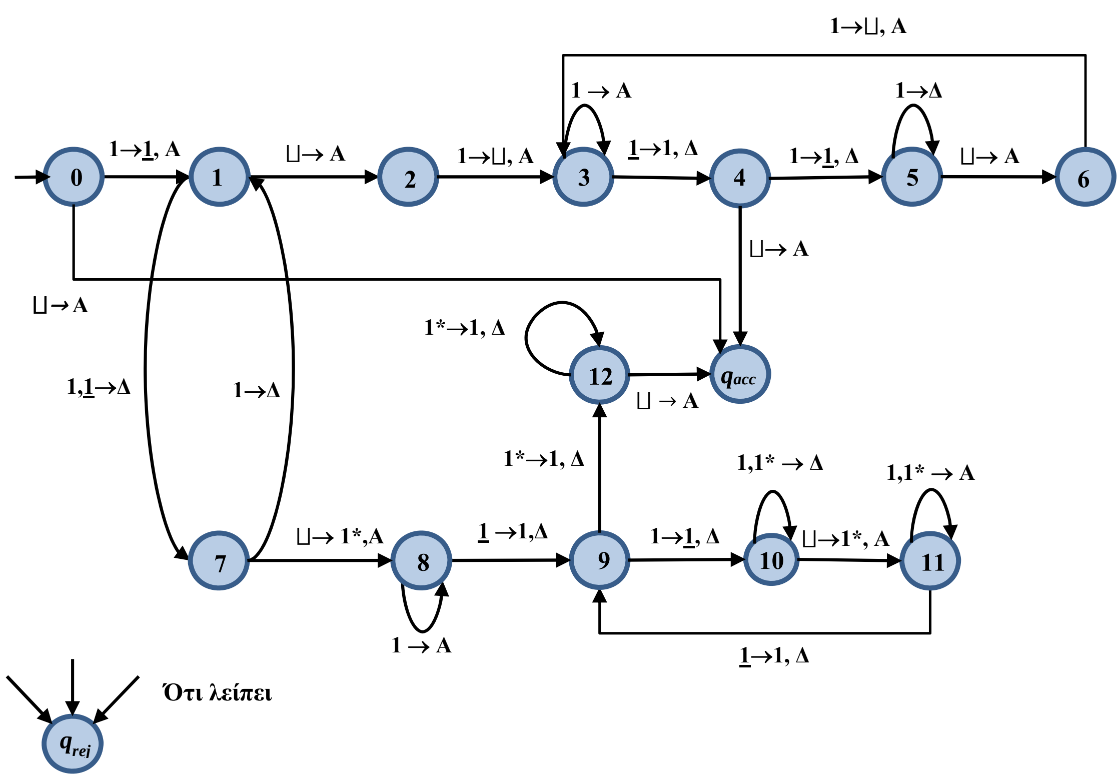


Περιγραφή μηχανής:

1. Στην πρώτη φάση, η μηχανή διαβάζει το πρώτο σύμβολο, που πρέπει να είναι το 1, και το υπογραμμίζει (μετάβαση από κατάσταση 0 σε κατάσταση 1).
2. Στη συνέχεια προχωρεί δεξιά. Αν δεν υπάρχουν άλλα σύμβολα τότε αποδέχεται τη λέξη. Διαφορετικά προσπερνά όποια x δυνατό να υπάρχουν μέχρι να βρει 0 το οποίο αντικαθιστά με x.
3. Προχωρεί μέχρι να βρει το επόμενο 1. Αν μετά από το 1 βρίσκεται το τέλος της ταινίας τότε προχωρεί στο Βήμα 4, διαφορετικά, προσπερνά όλα τα x, αν υπάρχουν, μέχρι να βρει το επόμενο 0 το οποίο αντικαθιστά με x και επαναλαμβάνει το βήμα.
4. Επιστρέφει προς την αρχή της ταινίας μέχρι να βρει το σύμβολο $\underline{1}$. Στη συνέχεια, προσπερνά τα x και τα $\underline{1}$ και εντοπίζει το επόμενο 1 το οποίο μετατρέπει σε $\underline{1}$. Αν δεν υπάρχουν άλλα σύμβολα, τότε η μηχανή αποδέχεται τη λέξη, διαφορετικά επαναλαμβάνει από το βήμα 2.

(β) Η ζητούμενη μηχανή Turing μπορεί να διατυπωθεί ως την επτάδα $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ όπου

1. Το σύνολο καταστάσεων Q αποτελείται από τις καταστάσεις που εμφανίζονται στο πιο κάτω σχήμα
2. Το αλφάβητο εισόδου Σ είναι το {1}
3. Το αλφάβητο ταινίας Γ είναι το $\Sigma \cup \{\underline{1}, 1, 1^*, \sqcup\}$
4. Η *συνάρτηση μετάβασης* δ είναι όπως απεικονίζεται στο πιο κάτω σχήμα
5. $q_o = 0 \in Q$ είναι η *εναρκτήρια κατάσταση*
6. $q_{acc} \in Q$ είναι η *κατάσταση αποδοχής*
7. $q_{rej} \in Q$ είναι η *κατάσταση απόρριψης*



Περιγραφή μηχανής:

1. Ξεκινώντας η μηχανή υπογραμμίζει το πρώτο 1, αν υπάρχει, για να αναγνωρίζει την αρχή της ταινίας. Στη συνέχεια διασχίζει την ταινία για να διαπιστώσει κατά πόσο το πλήθος των 1 είναι άρτιο (οπόταν και προχωρεί στο Βήμα 2) ή περιττό (προχωρεί στο Βήμα 5).
2. Σε περίπτωση που το πλήθος είναι άρτιο (κατάσταση 1) διαγράφει το τελευταίο στοιχείο.
3. Επιστρέφει στην αρχή της ταινίας, επαναφέρει το <u>1</u> και υπογραμμίζει το αμέσως επόμενο στοιχείο, αν υπάρχει, και πηγαίνει στο τέλος της ταινίας για να διαγράψει το τελευταίο στοιχείο. Επαναλαμβάνει από το Βήμα 3. Αν δεν υπάρχει άλλο στοιχείο τότε τερματίζει τη λειτουργία της στην κατάσταση αποδοχής.
4. Σε περίπτωση που το πλήθος των 1 στην ταινία είναι περιττό (κατάσταση 7) προσθέτει ένα 1* στο τέλος της ταινίας.
5. Επανέρχεται στην αρχή της ταινίας και εντοπίζει το <u>1</u> το επαναφέρει και υπογραμμίζει το επόμενο 1 αν υπάρχει. Αν δεν υπάρχει τότε προχωρεί στο Βήμα 6. Διαφορετικά προχωρεί στο τέλος της ταινίας και προσθέτει ένα 1* και επαναλαμβάνει το βήμα.
6. Διασχίζει το υπόλοιπο της ταινίας μετατρέποντας κάθε 1* σε 1. Όταν φτάσει στο τέλος της ταινίας τότε τερματίζει τη λειτουργία της.

**<u>Άσκηση 2</u>**

*Να παρουσιάσετε λεπτομερείς περιγραφές (i) μιας απλής μηχανή Turing και (ii) μιας πολυταινιακής μηχανής Turing οι οποίες να διαγιγνώσκουν τη γλώσσα*

$$\{\, uxvx^{rev} \mid u,v,x \in \{0,1,2\}^{+} \text{ και } |u| = |v| \,\}$$

*Να συγκρίνετε τις δύο μηχανές ως προς τη χρονική τους πολυπλοκότητα.*

**<u>Λύση</u>**

(i) Η πιο κάτω μηχανή Turing λειτουργεί ως εξής: Αφού εντοπίσει την πρώτη θέση του δεύτερου μισού της ταινίας, αν υπάρχει, ελέγχει μια-μια όλες τις δυνατότητες για την λέξη x, η οποία μπορεί να ξεκινά από τη δεύτερη θέση της ταινίας μέχρι και την τελευταία θέση του πρώτου «μισού». Αν κάποια από αυτές τις συμβολοσειρές συμπίπτει με την αντίστροφη της λέξης στο τέλος της ταινίας τότε η μηχανή αποδέχεται. Διαφορετικά απορρίπτει.

1_Tape = ‘ Με δεδομένο εισόδου μια λέξη x

1. Επιβεβαίωσε ότι η λέξη έχει άρτιο μήκος. Αν όχι, τότε απόρριψε.
2. Σημάδεψε την πρώτη θέση της ταινίας, πήγαινε στο τέλος και σημάδεψε την τελευταία. Συνέχισε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να εντοπίσεις την πρώτη θέση του δεύτερου μισού της ταινίας.
3. Επέστρεψε στη θέση 2.
4. Μέχρι να φτάσεις στο τελευταίο στοιχείο του πρώτου μισού της ταινίας:
    a. Διάβασε το στοιχείο της θέσης αυτής και σύγκρινέ το με το τελευταίο στοιχείο της ταινίας. Αν είναι τα ίδια συνέχισε με το επόμενο ζευγάρι (τρίτο στοιχείο στο πρώτο μισό και πρότελευταίο στοιχείο στο δεύτερο μισό). Συνέχισε με αυτό τον τρόπο μέχρι συγκρίνοντας ένα-ένα τα αμέσως επόμενα ζευγάρια προς το κέντρο της ταινίας.
    b. Αν φτάσεις στο τελευταίο στοιχείο του πρώτου μισού της ταινίας και τα ζευγάρια περιέχουν όμοια στοιχεία τότε αποδέξου τη λέξη, διαφορετικά,

επανάλαβε το Βήμα 4 ξεκινώντας αυτή τη φορά από το επόμενο στοιχείο του πρώτου μισού της ταινίας.

5. Αν έχεις εξαντλήσεις όλες τις δυνατές αρχικές θέσεις για το x τότε απόρριψε τη λέξη.’

Η TM 1_Tape θα χρειαστεί O(n) χρόνο για το Βήμα 1, $O(n^2)$ χρόνο για το Βήμα 2, ενώ για το Βήμα 4 θα κάνει (στη χειρότερη περίπτωση) n επαναλήψεις κάθε μια από τις οποίες θα χρειαστεί χρόνο $O(n^2)$. Επομένως, η χρονική πολυπλοκότητας της 1_Tape ανήκει στην τάξη $O(n^3)$.

(ii) Η πιο κάτω διταινιακή μηχανή Turing λειτουργεί παρόμοια με την 1_Tape. Έχοντας όμως στη διάθεσή της δύο ταινίες, αντιγράφει το δεύτερο μισό από την πρώτη ταινία στη δεύτερη ταινία και μετά αποφασίζει την ύπαρξη συμβολοσειράς x η οποία εμφανίζεται στο τέλος του πρώτου μισού και ως $x^{rev}$ στην αρχή του δεύτερου μισού.

2_Tape = ‘ Με δεδομένο εισόδου μια λέξη x:

1. Επιβεβαίωσε ότι η λέξη έχει άρτιο μήκος. Αν όχι, τότε απόρριψε.
2. Διάβασε το πρώτο σύμβολο από την ταινία και υπογράμμισέ το. Πήγαινε στο τέλος της ταινίας και διάβασε το τελευταίο σύμβολο. Αντίγραψε το σύμβολο αυτό στη δεύτερη ταινία. Επέστρεψε αριστερά μέχρι να βρεις το πρώτο μη υπογραμμισμένο σύμβολο. Αν δεν υπάρχει τότε προχώρησε στο Βήμα 3. Αν υπάρχει τότε υπογράμμισέ το και επανέλαβε από το Βήμα 2.
3. Πήγαινε στο τελευταίο σύμβολο της πρώτης ταινίας και το πρώτο σύμβολο της δεύτερης ταινίας. Αν είναι τα ίδια αποδέξου. Διαφορετικά πήγαινε στο προτελευταίο σύμβολο της πρώτης ταινίας και σύγκρινε τη λέξη που ακολουθεί με τη λέξη στις δύο πρώτες θέσεις της δεύτερης ταινίας. Επανάλαβε το βήμα, κάθε φορά ξεκινώντας από την προηγούμενη θέση στην πρώτη ταινία. Αν εντοπίσεις θέση από την οποία η λέξη να συμπίπτει με αρχική υπολέξη της δεύτερης ταινίας, τότε αποδέξου. Διαφορετικά απόρριψε.

Η TM 2_Tape θα χρειαστεί O(n) χρόνο για το Βήμα 1, $O(n^2)$ χρόνο για το Βήμα 2, ενώ για το Βήμα 3 θα κάνει n επαναλήψεις κάθε μια από τις οποίες θα χρειαστεί χρόνο αυτή τη φορά της τάξης O(n). Επομένως, η χρονική πολυπλοκότητας της 2_Tape ανήκει στην τάξη $O(n^2)$.

**<u>Άσκηση 3</u>**

Δώστε αφ’ υψηλού περιγραφές μηχανών Turing που να διαγιγνώσκουν τις ακόλουθες γλώσσες. Σε περίπτωση που θα χρησιμοποιήσετε μηχανές από τις διαλέξεις να τις περιγράψετε.

*(α) { $\langle D,G \rangle$ | το D είναι ένα DFA και το G μια ασυμφραστική γραμματική τέτοια ώστε $L(G) \subseteq L(D)$ }*

S = ‘ Για είσοδο $\langle D,G \rangle$ , όπου το D είναι ένα DFA και το G ένα PDA:

1. Δημιουργούμε ένα PDA, έστω P, το οποίο αποδέχεται τη γλώσσα L(G)-L(D). Συγκεκριμένα, αν $G = \langle Q_1, \Sigma, \Gamma, \delta_1, q_1, F_1 \rangle$ και $D = \langle Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2 \rangle$ κατασκευάζουμε το $P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$ ως εξής:
   i. Καταστάσεις του P, είναι οι καταστάσεις (x,y) όπου $x \in Q_1$ και $y \in Q_2$
   ii. $q_0 = (q_1, q_2)$
   iii. Τελικές καταστάσεις του P, είναι οι καταστάσεις (x,y) όπου η x είναι τελική κατάσταση του G και η y δεν είναι τελική κατάσταση του D.

iv. Στο αυτόματο P η μετάβαση $((x',y'),b')\in\delta((x,y),a,b)$ είναι εφικτή εφόσον η μετάβαση $(x',b')\in\delta_1(x,a,b)$ είναι εφικτή στο P και η μετάβαση $y'=\delta_2(y,a)$ είναι εφικτή στο αυτόματο D.

2. Μετατρέπουμε το P σε μια ισοδύναμη ασυμφραστική γραμματική, έστω H.
3. Εφαρμόζουμε την TM R, διαφάνεια 8-18 ($ΚΕΝΟΤΗΤΑ_{CFG}$), με δεδομένη τη γραμματική H. Αν η R αποδεχτεί αποδεχόμαστε, διαφορετικά απορρίπτουμε.'

*(β) {⟨ $R_1$, $R_2$, $R_3$⟩ | $R_1$, $R_2$, $R_3$ κανονικές εκφράσεις τέτοιες ώστε υπάρχει τουλάχιστον μια λέξη που είναι αποδεκτή από τουλάχιστον δύο από τις κανονικές εκφράσεις }*

S = ' Για είσοδο ⟨ $R_1$, $R_2$, $R_3$ ⟩ όπου τα $R_1$, $R_2$, $R_3$ είναι κανονικές εκφράσεις:

1. Μετατρέπουμε τις τρεις κανονικές εκφράσεις σε ισοδύναμα αυτόματα $D_1$, $D_2$, $D_3$.
2. Κατασκευάζουμε το αυτόματο $D_{12}$ το οποίο αναγνωρίζει τη γλώσσα $L(D_1)\cap L(D_2)$.
3. Κατασκευάζουμε το αυτόματο $D_{13}$ το οποίο αναγνωρίζει τη γλώσσα $L(D_1)\cap L(D_3)$.
4. Κατασκευάζουμε το αυτόματο $D_{23}$ το οποίο αναγνωρίζει τη γλώσσα $L(D_2)\cap L(D_3)$.
5. Κατασκευάζουμε το αυτόματο D' το οποίο αναγνωρίζει τη γλώσσα $D_{12}\cup D_{23}\cup D_{13}$.
6. Ελέγχουμε αν $L(D') = \emptyset$ χρησιμοποιώντας τον διαγνώστη T (Διαφάνεια 8-10).
7. Αν ο T αποδεχθεί τότε αποδεχόμαστε, διαφορετικά απορρίπτουμε.

*(γ) { ⟨G⟩ | το G είναι ένα PDA που παράγει μόνο λέξεις με μήκος 2 }*

**Λύση**

Κτίζουμε το αυτόματο D που αποδέχεται όλες τις λέξεις μήκους 2 (η γλώσσα αυτή είναι πεπερασμένη και επομένως και κανονική). Εφαρμόζουμε τον διαγνώστη από το μέρος (α) με είσοδο ⟨D,G⟩. Προφανώς, αν ο διαγνώστης αποδεχτεί τότε η G παράγει μόνο λέξεις με μήκος 2.

**Άσκηση 4**

*Έστω $C^1$ η κλάση όλων των μηχανών Turing με αλφάβητο εισόδου το σύνολο {a,⊔} και $C^4$ η κλάση όλων των μηχανών Turing με αλφάβητο εισόδου το σύνολο {a,b,c,d,⊔}. Να δείξετε ότι οι δύο κλάσεις είναι ισοδύναμες, δηλαδή, να δείξετε ότι κάθε μηχανή Turing $M \in C^1$ μπορεί να προσομοιωθεί από μια μηχανή Turing $M' \in C^4$ και αντίστροφα.*

**Λύση**

Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε μηχανή Turing που ανήκει στην κλάση $C^1$ μπορεί να τύχει προσομοίωσης από μια μηχανή Turing που ανήκει στην κλάση $C^4$ – απλά η ισοδύναμη μηχανή δεν θα χρησιμοποιεί τα επιπλέον σύμβολα b,c,d.

Για την αντίθετη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι M' είναι μια μηχανή Turing που ανήκει στην κλάση $C^4$. ΘΑ δείξουμε ότι η λειτουργία της M' μπορεί να τύχει προσομοίωσης από μια μηχανή Turing M που ανήκει στην κλάση $C^1$.

Κατ'αρχάς θα πρέπει να επινοήσουμε μια μέθοδο μέσω της οποίας να αρχικοποιείται η ταινία της μηχανής $M^1$. Για να το πετύχουμε πρέπει να κατασκευάσουμε μια κωδικοποίηση των συμβόλων {a,b,c,d,⊔} στο αλφάβητο {a,⊔} μέσω μιας μονομορφικής και επιμορφικής συνάρτησης. Η συνάρτηση που επιλέγουμε (υπάρχουν και άλλες) είναι η εξής:

f(a) = aaa

f(b) = ⊔aa

f(c) = ⊔⊔a

f(d) = ⊔a⊔

f(⊔) = ⊔⊔⊔

Με βάση αυτή τη συνάρτηση και δοσμένης μιας ταινίας του $M^4$ παράγουμε την ταινία του $M^1$ εφαρμόζοντας την f σε κάθε σύμβολο της ταινίας. Για παράδειγμα
η ταινία

aabddcc⊔⊔⊔⊔⊔ …

μεταφράζεται στην ταινία

aaaaaa⊔aa⊔a⊔⊔a⊔⊔⊔a⊔⊔a⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔**…**

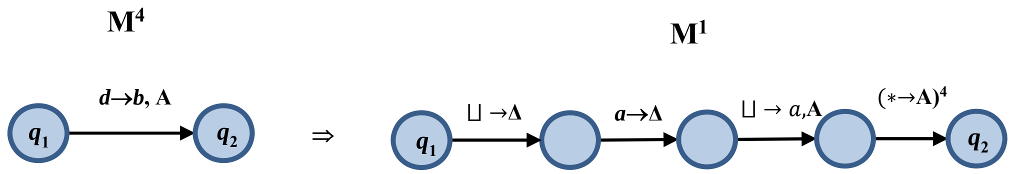
Στη συνέχεια πρέπει να ορίσουμε πως κάθε δυνατή μετάβαση της ΤΜ $M^4$ μπορεί να προσομοιωθεί από την ΤΜ $M^1$.

Η περίπτωση που η μετάβαση βασίζεται στην ύπαρξη ενός *a* στη θέση κεφαλής της ταινίας φαίνεται πιο κάτω. Προσοχή πρέπει να δοθεί για υλοποίηση της μετακίνησης προς τα αριστερά αφού η κεφαλή της ταινίας θα πρέπει να μετακινηθεί στην αρχή της προηγούμενης τριάδας από χαρακτήρες. Συνεπώς, μετά την ολοκλήρωση της εγγραφής του όποιου συμβόλου, θα πρέπει η κεφαλή να μετακινηθεί μέχρι και 6 θέσεις προς τα αριστερά. Ακολουθούν οι διαφορετικές μεταβάσεις και η μετάφρασή τους, όπου χρησιμοποιούμε το σύμβολο * για να αναφερθούμε σε οποιοδήποτε από τα *a*, *b*, *c* και *d*.

| **$M^4$** | | **$M^1$** |
|---|---|---|
| $\xrightarrow{a \to a, \Delta}$ | $\Rightarrow$ | $\xrightarrow{a \to a, \Delta} \xrightarrow{a \to a, \Delta} \xrightarrow{a \to a, \Delta}$ |
| $\xrightarrow{a \to b, \Delta}$ | $\Rightarrow$ | $\xrightarrow{a \to \sqcup, \Delta} \xrightarrow{a \to a, \Delta} \xrightarrow{a \to a, \Delta}$ |
| $\xrightarrow{a \to c, \Delta}$ | $\Rightarrow$ | $\xrightarrow{a \to \sqcup, \Delta} \xrightarrow{a \to \sqcup, \Delta} \xrightarrow{a \to a, \Delta}$ |
| $\xrightarrow{a \to d, \Delta}$ | $\Rightarrow$ | $\xrightarrow{a \to \sqcup, \Delta} \xrightarrow{a \to a, \Delta} \xrightarrow{a \to \sqcup, \Delta}$ |
| $\xrightarrow{a \to \sqcup, \Delta}$ | $\Rightarrow$ | $\xrightarrow{a \to \sqcup, \Delta} \xrightarrow{a \to \sqcup, \Delta} \xrightarrow{a \to \sqcup, \Delta}$ |
| $\xrightarrow{a \to a, A}$ | $\Rightarrow$ | $\xrightarrow{a \to a, A} \xrightarrow{* \to *, A} \xrightarrow{* \to *, A}$ |
| $\xrightarrow{a \to b, A}$ | $\Rightarrow$ | $\xrightarrow{a \to \sqcup, A} \xrightarrow{* \to *, A} \xrightarrow{* \to *, A}$ |
| $\xrightarrow{a \to c, A}$ | $\Rightarrow$ | $\xrightarrow{a \to \sqcup, \Delta} \xrightarrow{a \to \sqcup, A} \left(\xrightarrow{* \to *, A}\right)^3$ |
| $\xrightarrow{a \to d, A}$ | $\Rightarrow$ | $\xrightarrow{a \to \sqcup, \Delta} \xrightarrow{a \to a, \Delta} \xrightarrow{a \to \sqcup, A} \left(\xrightarrow{* \to *, A}\right)^4$ |
| $\xrightarrow{a \to \sqcup, A}$ | $\Rightarrow$ | $\xrightarrow{a \to \sqcup, \Delta} \xrightarrow{a \to \sqcup, \Delta} \xrightarrow{a \to \sqcup, A} \left(\xrightarrow{* \to *, A}\right)^4$ |

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τις μεταφράσεις των μεταβάσεων που αναφέρονται στην ύπαρξη των συμβόλων b, c, d και ⊔.

Το πιο κάτω σχήμα παρουσιάζει τη μετάφραση της $d \to b$, Α :




Οι υπόλοιπες μεταβάσεις μπορούν να μεταφραστούν με παρόμοιο τρόπο και αφήνονται ως άσκηση στον αναγνώστη.

**<u>Άσκηση 5</u>**

*Έστω δύο λέξεις $w_1$ και $w_2$. Η λέξη $w_1$ ονομάζεται τραύλισμα της λέξης $w_2$ αν η $w_1$ επαναλαμβάνει κάθε σύμβολο της $w_2$ μηδέν ή περισσότερες φορές. Για παράδειγμα, οι λέξεις 110, 11000 και 1000 αποτελούν τραυλίσματα της λέξης 10. Με βάση αυτή τη σχέση, δοθείσας μιας γλώσσας Λ ορίζουμε*

*Τραύλισμα(Λ) = { w | η λέξη w αποτελεί τραύλισμα μιας λέξης u $\in$ Λ}*

*Με λόγια, η γλώσσα Τραύλισμα(Λ) περιέχει όλες τις λέξεις που αποτελούν τραυλίσματα λέξεων από τη γλώσσα Λ.*

*(α) Να αποδείξετε ότι η κλάση των διαγνώσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς την πράξη Τραύλισμα.*

**<u>Λύση</u>**

(α) Για να δείξουμε ότι η κλάση των διαγνώσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς την πράξη *Τραύλισμα* πρέπει να δείξουμε ότι αν Λ είναι μια διαγνώσιμη γλώσσα, τότε υπάρχει μέθοδος διάγνωσης της γλώσσας *Τραύλισμα*(Λ). Ας υποθέσουμε ότι Λ διαγνώσιμη γλώσσα και Μ ΤΜ που τη διαγιγνώσκει. Η πιο κάτω μηχανή διαγιγνώσκει κατά πόσο μια λέξη w $\in$ *Τραύλισμα*(Λ):

Μ' = 'Για λέξη w:

1. Δημιούργησε όλες τις λέξεις u που προκύπτουν αν αφαιρέσουμε κάποιες επαναλήψεις από οποιαδήποτε ακολουθία συνεχόμενων όμοιων συμβόλων στην w.
2. Τρέξε μια-μια τις λέξεις u στη μηχανή Μ. Μόλις η Μ αποδεχθεί μια από αυτές τότε αποδέξου. Διαφορετικά, αν δεν αποδεχθεί καμιά από τις λέξεις τότε απόρριψε.'

Ορθότητα/Τερματισμός: Σύμφωνα με τον ορισμό της πράξης *Τραύλισμα*(Λ), μια λέξη w ανήκει στο *Τραύλισμα*(Λ) αν αποτελεί το τραύλισμα μιας λέξης u στο Λ. Η πιο πάνω μηχανή αφαιρεί συνεχόμενες εμφανίσεις συμβόλων από την w και τρέχει τη λέξη που προκύπτει στην Μ. Αν η Μ αποδεχθεί, αυτό θα πει ότι η u ανήκει στην Λ και επομένως η w περιέχοντας επαναλήψεις συμβόλων από την u ανήκει στο σύνολο *Τραύλισμα*(Λ) που είναι και το ζητούμενο. Αν η Μ δεν αποδεχθεί, καμιά από τις λέξεις u, αυτό θα πει ότι η w δεν αποτελεί τραύλισμα κάποιας λέξης από το Λ και επομένως δεν ανήκει στο σύνολο *Τραύλισμα*(Λ).

Αφού η Μ αποτελεί διαγνώστη και η μηχανή που ορίσαμε αποτελεί διαγνώστη.

*(β) Ισχύει το ίδιο για την κλάση των αναγνωρίσιμων γλωσσών; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

**Λύση**

Αναφορικά με το δεύτερο ερώτημα, μπορούμε να δείξουμε την κλειστότητα της πράξης *Τραύλισμα* και στα πλαίσια των αναγνωρίσιμων γλωσσών. Η μηχανή όμως που ορίσαμε πιο πάνω δεν είναι κατάλληλη για τον στόχο αυτό διότι από τη στιγμή που η Λ είναι αναγνωρίσιμη γλώσσα η ΤΜ Μ είναι δυνατόν να εγκλωβιστεί σε μια από τις λέξεις που τρέχει η μηχανή Μ΄ στο βήμα 2, γεγονός που δυνατόν να μας αποτρέψει από το να εντοπίσουμε την κατάλληλη λέξη για την οποία η w αποτελεί τραύλισμα και επομένως να μας αποτρέψει από το να αναγνωρίσουμε ότι μια λέξη w ανήκει στο σύνολο *Τραύλισμα*(Λ).

Για να αποφύγουμε το πρόβλημα θα πρέπει η ζητούμενη μηχανή να λειτουργήσει μη ντετερμινιστικα ως εξής:

Ν' = 'Για λέξη w:

1. Επέλεξε μη ντετερμινιστικά λέξη u η οποία προκύπτει αν αφαιρέσουμε κάποιες επαναλήψεις από οποιαδήποτε ακολουθία συνεχόμενων όμοιων συμβόλων στην w.
2. Τρέξε τη u στη μηχανή Μ. Αν η Μ αποδεχθεί τότε αποδέξου, διαφορετικά απόρριψε.'

Και πάλι παρατηρούμε ότι η μηχανή θα αποδεχθεί και θα τερματίζει αν και μόνο αν η λέξη w ανήκει στο σύνολο *Τραύλισμα*(Λ).