

Ασκήσεις Επανάληψης από 3/5

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι η πιο κάτω γλώσσα δεν είναι διαγνώσιμη.

$\{ \langle M \rangle \mid L(M) \supseteq \{ \text{ΘΕΩΡΙΑ, ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ} \} \text{ και } |L(M)| \geq 3 \}$

Λύση:

Θέλουμε να δείξουμε ότι η γλώσσα

$$\Theta Y 3 = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \supseteq \{ \text{ΘΕΩΡΙΑ, ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ} \} \text{ και } |L(M)| \geq 3 \}$$

είναι μη διαγνώσιμη. Για να το δείξουμε θα αναγάγουμε μια γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα, την A_{TM} , στην υπό μελέτη γλώσσα $\Theta Y 3$.

Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η γλώσσα $\Theta Y 3$ είναι διαγνώσιμη και η $TM R$ είναι σε θέση να τη διαγνώσει. Με βάση τον διαγνώστη R θα κατασκευάσουμε ένα διαγνώστη S για το πρόβλημα A_{TM} . Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η $\Theta Y 3$ είναι μια μη διαγνώσιμη γλώσσα.

Ο διαγνώστης S έχει ως εξής:

$S = \text{“Με είσοδο } \langle M, w \rangle$

1. Φτιάξε τη $TM M'$ η οποία με είσοδο x :
 - (α) Αν $x = \text{ΘΕΩΡΙΑ}$, η M' αποδέχεται
 - (β) Αν $x = \text{ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ}$, η M' αποδέχεται
 - (γ) Διαφορετικά, η M' τρέχει το M με είσοδο w . Αν η M αποδεχτεί το w τότε και η M' αποδέχεται διαφορετικά απορρίπτει.
2. Τρέξε την R με είσοδο $\langle M' \rangle$.
3. Αν η R αποδεχτεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ.
4. Αν η R απορρίψει ΑΠΟΡΡΙΨΕ.

Εξετάζοντας την πιο πάνω μηχανή παρατηρούμε ότι η μηχανή M' αποδέχεται τις λέξεις ΘΕΩΡΙΑ και ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ και τουλάχιστον ακόμα μια λέξη, αν και μόνο αν η μηχανή M αποδέχεται τη λέξη w . Ως εκ τούτου, με είσοδο τη μηχανή M' , ο διαγνώστης R θα αποδεχτεί αν και μόνο αν η μηχανή M' αποδέχεται τις λέξεις ΘΕΩΡΙΑ , ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ και τουλάχιστον ακόμα μια λέξη ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν η μηχανή M αποδέχεται τη λέξη w .

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

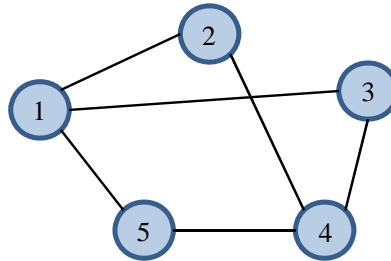
Άσκηση 2

Θεωρήστε την πιο κάτω γλώσσα:

$ANEΞAPTHTO_CYNOLO =$

$\{ \langle G, k \rangle \mid \text{ο } G = (V, E) \text{ είναι ένα γράφος ο οποίος διαθέτει ένα σύνολο κόμβων } S \subseteq V \text{ μεγέθους } k \text{ τέτοιο ώστε για κάθε } u, v \in S, (u, v) \notin E \}$

Για παράδειγμα, $\langle G, 3 \rangle$, όπου G ο πιο κάτω γράφος, ανήκει στο $ANEΞAPTHTO_CYNOLO$ αφού διαθέτει το σύνολο με τρεις κόμβους $\{2, 3, 5\}$ όπου οι κόμβοι 2, 3 και 5 δεν συνδέονται μεταξύ τους μέσω ακμών.



(α) Να δείξετε ότι το πρόβλημα αυτό ανήκει στην κλάση NP.

(β) Να δείξετε ότι το πρόβλημα είναι NP-πλήρες.

Λύση

(α) Ακολουθεί αλγόριθμος N που αποτελεί μη ντετερμινιστικό διαγνώστη πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα.

$N :=$ “Για είσοδο $\langle G, k \rangle$ όπου G ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα και k ένας ακέραιος:

1. Επιλέγουμε μη ντετερμινιστικά ένα σύνολο k κόμβων του G , έστω C
2. Ελέγχουμε αν κάποιο ζεύγος κορυφών του C συνδέεται μέσω ακμής στον γράφο G .
3. Αν υπάρχει κάποιο ζεύγος κορυφών που συνδέεται μέσω ακμής απορρίπτουμε, διαφορετικά, αποδεχόμαστε.”

Ο χρόνος εκτέλεσης του N είναι πολυωνυμικός ως προς το μέγεθος του γράφου, επομένως ο N αποτελεί μη ντετερμινιστικό διαγνώστη πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα.

Συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP.

(β) Για να δείξουμε ότι το πρόβλημα είναι NP πλήρες αρκεί να δείξουμε ότι ένα γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα μπορεί να αναχθεί σε αυτό. Η αναγωγή θα γίνει από το πρόβλημα ΚΛΙΚΑ. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι αν υπάρχει πολυωνυμική λύση για το πρόβλημα $ANEΞAPTHTO_CYNOLO$ τότε υπάρχει πολυωνυμική λύση και για το πρόβλημα ΚΛΙΚΑ.

Έστω ένας γράφος $G = (V, E)$ και παράμετρος k . Θέλουμε να αποφασίσουμε κατά πόσο υπάρχει k -κλικά στον γράφο. Κατασκευάζουμε τον γράφο G' ως τον γράφο με κορυφές τις κορυφές του G και ακμή ανάμεσα σε δύο κορυφές αν και μόνο οι δύο κορυφές δεν συνδέονται στον γράφο G . Δηλαδή, $G' = (V, E')$ όπου

$$E' = \{(u, v) \mid (u, v) \notin E\}$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει πολυωνυμική λύση για το πρόβλημα $ANEΞAPTHTO_CYNOLO$. Τρέχουμε τον σχετικό αλγόριθμο στον γράφο G' . Αν ο αλγόριθμος αποδεχτεί τότε

απαντούμε ότι ο αρχικός μας γράφος περιέχει k -κλίκα, διαφορετικά, αν απορρίψει, τότε απαντούμε ότι ο γράφος δεν περιέχει k -κλίκα.

Ορθότητα: Παρατηρούμε τα εξής:

Ο γράφος G' περιέχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k

αν και μόνο αν

υπάρχει σύνολο $S=\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ τέτοιο ώστε για κάθε $v_i, v_j \in S, (v_i, v_j) \in E'$

αν και μόνο αν

υπάρχει σύνολο $S=\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ τέτοιο ώστε για κάθε $v_i, v_j \in S, (v_i, v_j) \in E$ (από τον ορισμό του E)

αν και μόνο αν

ο γράφος G περιέχει k -κλίκα.

Συμπέρασμα: Αν το πρόβλημα ANEΞΑΡΤΗΤΟ_ΣΥΝΟΛΟ επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο τότε και το πρόβλημα ΚΛΙΚΑ επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Επομένως, αφού το πρόβλημα της ΚΛΙΚΑΣ είναι NP-πλήρες και το πρόβλημα ANEΞΑΡΤΗΤΟ_ΣΥΝΟΛΟ είναι NP-πλήρες.