# Φροντιστήριο 9 – Λύσεις

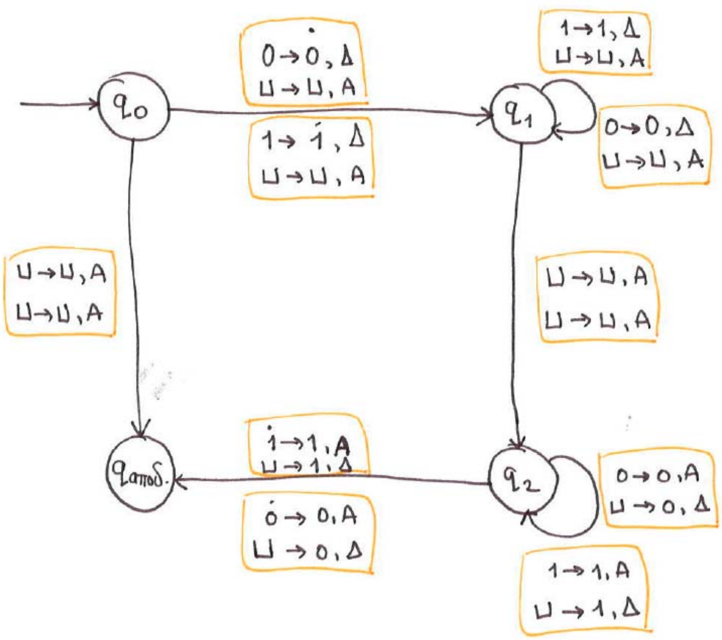
## Άσκηση 1

**Να κατασκευάσετε μια μηχανή Turing με δύο ταινίες η οποία να αποδέχεται στην πρώτη της ταινία μια οποιαδήποτε λέξη $w \in \{0,1\}^*$ και να γράφει τη λέξη $w^R$ στη δεύτερη της ταινία.**

## Λύση

Η ζητούμενη μηχανή φαίνεται πιο κάτω. Η λειτουργία της χωρίζεται σε 4 φάσεις:

- Αν η λέξη είναι κενή, τότε αποδέχεται (μετάβαση $q_0 \rightarrow q_{αποδ}$). Διαφορετικά σημαδεύει το πρώτο στοιχείο (μετάβαση $q_0 \rightarrow q_1$).
- Προχωρεί στο τέλος της πρώτης ταινίας (μονοπάτι $q_1 \rightarrow q_2$). Σε κάθε βήμα η δεύτερη ταινία και η κεφαλή της παραμένουν ανέπαφες.
- Για όσο η πρώτη ταινία περιέχει τα στοιχεία 0 ή 1, η μηχανή τα αντιγράφει στη δεύτερη ταινία. Σε κάθε βήμα κινείται αριστερά στην πρώτη ταινία και δεξιά στη δεύτερη ταινία (ακμή $q_2 \rightarrow q_2$).
- Όταν φτάσει στο πρώτο στοιχείο της πρώτης ταινίας, το αντιγράφει στη δεύτερη ταινία και τερματίζει (ακμή $q_2 \rightarrow q_{αποδ}$).




## Άσκηση 2

**Να αποδείξετε ότι η κλάση των διαγνώσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς:**

**(α) Την τομή**

**(β) Το συμπλήρωμα**

**(γ) Τη συναρμογή**

**Θεωρήστε επίσης την κλάση των αναγνωρίσιμων γλωσσών. Ως προς ποιες από τις πιο πάνω πράξεις ισχύει η κλειστότητα για τη συγκεκριμένη κλάση;**

**<u>Λύση</u>**

(α) Έστω διαγνώσιμες γλώσσες $L_1$, $L_2$ και $M_1$, $M_2$ δύο μηχανές Turing που τις διαγιγνώσκουν, αντίστοιχα. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει μηχανή Turing η οποία διαδιγνώσκει τη γλώσσα $L_1 \cap L_2$. Κατασκευάζουμε την M ως εξής:

M = ‘Για είσοδο w

1. Τρέξε τη $M_1$ για είσοδο w.
2. Αν η $M_1$ αποδεχθεί τότε τρέξε την $M_2$ για είσοδο w. Διαφορετικά απόρριψε.
3. Αν η $M_2$ αποδεχθεί τότε αποδέξου. Διαφορετικά απόρριψε.’

*Ορθότητα και τερματισμός:* Όντας διαγνώστες, οι $M_1$ και $M_2$ θα τερματίσουν. Επομένως και η μηχανή M τερματίζει πάντα. Επιπλέον, η M αποδέχεται αν και μόνο αν οι $M_1$ και $M_2$ αποδεχτούν. Αυτό θα συμβεί εφόσον τόσο η $M_1$ όσο και η $M_2$ αποδεχτεί την *w*. Εξ’ορισμού οι δύο μηχανές θα αποδεχτούν την *w* αν και μόνο αν $w \in L_1$ (μηχανή $M_1$) και $w \in L_2$ (μηχανή $M_1$). Συνεπώς, η M θα αποδεχτεί την *w* αν και μόνο αν $w \in L_1 \cap L_2$.

(β) Έστω διαγνώσιμη γλώσσα L και M μια μηχανή Turing που την διαγιγνώσκει, Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει μηχανή Turing M΄ η οποία διαγιγνώσκει τη γλώσσα $\overline{L}$. Κατασκευάζουμε την M ως εξής:

M’ = ‘Για είσοδο w

1. Τρέξε τη M για είσοδο w.
2. Αν η M αποδεχθεί τότε απόρριψε. Διαφορετικά αποδέξου.’

Ορθότητα και τερματισμός: Είναι προφανές ότι, αφού η M τερματίζει, η M’ τερματίζει και αποδέχεται μόνο τις λέξεις που δεν ανήκουν στη γλώσσα L.

(γ) Έστω διαγνώσιμες γλώσσες $L_1$, $L_2$ και $M_1$, $M_2$ δύο μηχανές Turing που τις διαγιγνώσκουν, αντίστοιχα. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει μηχανή Turing η οποία διαγιγνώσκει τη γλώσσα $L_1L_2$. Κατασκευάζουμε την M ως εξής:

M = ‘Για είσοδο w

1. Κατασκεύασε όλα τα δυνατά σπασίματα της λέξης w σε δύο υπολέξεις.
2. Για κάθε δυνατό σπάσιμο w = xy.
   a. Τρέξε την $M_1$ στο x. Αν η $M_1$ αποδεχθεί τότε τρέξε την $M_2$ στο y. Διαφορετικά επανάλαβε το βήμα για το επόμενο σπάσιμο.
   b. Αν η $M_2$ αποδεχθεί τότε αποδέξου. Διαφορετικά επανάλαβε το βήμα για το επόμενο σπάσιμο.’
3. Αν τα σπασίματα εξαντληθούν, απόρριψε τη λέξη.

*Ορθότητα και τερματισμός:* Όντας διαγνώστες, οι $M_1$ και $M_2$ θα τερματίσουν. Επομένως και η μηχανή M τερματίζει πάντα. Επιπλέον, η M αποδέχεται αν και μόνο αν οι $M_1$ και $M_2$ αποδεχτούν. Αυτό θα συμβεί εφόσον εντοπιστούν υπολέξεις x, y τέτοιες ώστε w = xy, $M_1$ αποδέχεται τη x και $M_2$ αποδέχεται τη y. Εξ’ορισμού οι δύο μηχανές θα αποδεχτούν τις δύο υπολέξεις εφόσον $x \in L_1$ (μηχανή $M_1$) και $y \in L_2$ (μηχανή $M_1$). Συνεπώς, η M θα αποδεχτεί την *w* αφού αυτή αποτελεί τη συναρμογή λέξεων $x \in L_1$ και $y \in L_2$ .

<u>Κλειστότητα κλάσης αναγνωρίσιμων γλωσσών ως προς τις πράξεις</u>

(α) Τομή: Η κλάση είναι κλειστή ως προς την τομή. Αυτό μπορεί να δειχθεί μέσω της κατασκευής που χρησιμοποιήσαμε και για τις διαγνώσιμες γλώσσες.

(β) Συμπλήρωμα. Η κλάση των αναγνωρίσιμων γλωσσών *δεν* είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα. Για να το δείξουμε, αρκεί να παρουσιάσουμε μια γλώσσα η οποία είναι αναγνωρίσιμη ενώ το συμπλήρωμά της δεν είναι αναγνωρίσιμο. Μια τέτοια γλώσσα είναι η $A_{TM}$ (δες Διαφάνεια 8-55).

(γ) Η κλάση των αναγνωρίσιμων γλωσσών είναι κλειστή ως προς τη συναρμογή Έστω αναγνωρίσιμες γλώσσες $L_1$, $L_2$ και $M_1$, $M_2$ δύο μηχανές Turing που τις αναγνωρίζουν, αντίστοιχα. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει μηχανή Turing η οποία αναγνωρίζει τη γλώσσα $L_1L_2$. Κατασκευάζουμε την N ως εξής:

N = ‘Για είσοδο w

1. Επέλεξε *μη-ντετερμινιστικά* ένα σπάσιμο της λέξης w σε δύο υπολέξεις.
2. Τρέξε την $M_1$ στο x. Αν η $M_1$ αποδεχθεί τότε τρέξε την $M_2$ στο y. Διαφορετικά απόρριψε.
3. Αν η $M_2$ αποδεχθεί τότε αποδέξου. Διαφορετικά απόρριψε.’

Προσέξτε τη διαφορά ανάμεσα στην TM που κατασκευάσαμε στην περίπτωση των διαγνώσιμων γλωσσών με την παρούσα TM:

Εδώ χρειάζεται να λάβουμε υπόψη μας το γεγονός ότι σε κάποιες εισόδους οι μηχανές $M_1$ και $M_2$ δυνατό να εγκλωβιστούν. Ως εκ τούτου, δεν αναλύουμε τα σπασίματα «σειριακά» αλλά μη-ντετερμινιστικά. Η εισαγωγή της μη ντετερμινιστικής επιλογής ανάμεσα στα δυνατά σπασίματα, μας εγγυάται ότι αν υπάρχει έστω και ένα σπάσιμο που να ικανοποιεί τις απαιτήσεις μας θα υπάρχει και εκτέλεση της μηχανής που θα το εντοπίσει.

**<u>Άσκηση 3</u>**

**Να δείξετε ότι τα πιο κάτω προβλήματα είναι επιλύσιμα:**

**(α) {*R* | *R* μια κανονική έκφραση που παράγει έστω και μία λέξη με περιττό αριθμό από 1}**

**(β) { *M* | το *M* είναι ένα DFA που αποδέχεται κάποια καρκινική λέξη}**

**<u>Λύση</u>**

(α) Το πρόβλημα είναι επιλύσιμο. Η βασική ιδέα στην απόδειξη αφορά στο ότι για να παράγει η R τουλάχιστον μια λέξη με περιττό αριθμό από 1 θα πρέπει η τομή της γλώσσας που παράγει η R και του συνόλου όλων των λέξεων με περιττό αριθμό από 1, να μην είναι κενή:

$$L(R) \cap \{w \mid \text{η λέξη } w \text{ περιέχει περιττό αριθμό από } 1\} \neq \emptyset.$$

Η γλώσσα διαγιγνώσκεται από την πιο κάτω TM.

M = ‘Για είσοδο $\langle R \rangle$ όπου R μια κανονική έκφραση

1. Μετάτρεψε την R σε ένα NFA, έστω $N_1$, χρησιμοποιώντας τον γνωστό μας αλγόριθμο (Διαφάνειες 3-9 – 3-10).
2. Μετάτρεψε τη κανονική έκφραση $0^*(0^*10^*10^*)^*10^*$ (η γλώσσα που αποτελείται από όλες τις λέξεις με περιττό αριθμό από 1) σε ένα NFA, έστω $N_2$, χρησιμοποιώντας τον ίδιο αλγόριθμο με το Βήμα 2.
3. Μετάτρεψε τα $N_1$ και $N_2$ σε ισοδύναμα DFA, έστω $M_1$ και $M_2$. (Κατασκευή από Διαφάνειες 2-36 – 2-38)

4. Δημιούργησε το αυτόματο, M, που αποδέχεται τη γλώσσα $L(M_1) \cap L(M_2)$. (Φροντιστήριο 2, Άσκηση 3)
5. Ελέγχουμε αν $L(M) = \emptyset$ χρησιμοποιώντας τον διαγνώστη T (Διαφάνεια 8-10).
6. Αν ο T αποδεχθεί τότε απορρίπτουμε, διαφορετικά αποδεχόμαστε.

(β) Κατ' αρχή, παρατηρούμε ότι δοθέντος ενός DFA, έστω $M_1$ που αποδέχεται τη γλώσσα $Λ_1$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα δεύτερο DFA, $M_2$, το οποίο να αποδέχεται τη γλώσσα που περιέχει όλες τις λέξεις το $Λ_1$ αντεστραμμένες. Δηλαδή, τη γλώσσα:

$Λ_2 = \{w^R \mid w \in Λ_1\}$.

Το αυτόματο $M_2$ κατασκευάζεται ως εξής:

- Αντίστρεψε τη φορά όλων των ακμών του $M_1$.
- Δημιούργησε μια νέα αρχική κατάσταση και πρόσθεσε ε-ακμές από αυτή την κατάσταση προς όλες τις καταστάσεις αποδοχής του $M_1$.
- Μετάτρεψε την αρχική κατάσταση του $M_1$ σε κατάσταση αποδοχής.
- Χρησιμοποίησε την κατασκευή μετατροπής από NFA σε DFA για να μετατρέψεις το αυτόματο NFA που προέκυψε μέσω των πιο πάνω βημάτων σε ένα ισοδύναμο DFA.

Επιστρέφοντας στο πρόβλημά μας, η γλώσσα διαγιγνώσκεται μέσω της ακόλουθης TM:

M = 'Για είσοδο $\langle D_1 \rangle$ όπου D ένα DFA

1. Κατασκεύασε ένα DFA, $D_2$, το οποίο να αποδέχεται όλες τις λέξεις του $D_1$ αντιστραμμένες, σύμφωνα με τη διαδικασία που αναφέραμε πιο πάνω.
2. Δημιούργησε το αυτόματο, D, που αποδέχεται τη γλώσσα $L(D_1) \cap L(D_2)$. (Φροντιστήριο 2, Άσκηση 3)
3. Ελέγχουμε αν $L(D) = \emptyset$ χρησιμοποιώντας τον διαγνώστη T (Διαφάνεια 8-10).
4. Αν ο T αποδεχθεί τότε δεν υπάρχει καμιά λέξη της D η οποία να εμφανίζεται και αντεστραμμένη στη D, επομένως, απορρίπτουμε, διαφορετικά αποδεχόμαστε.

**<u>Άσκηση 4</u>**

**Έστω *B* το σύνολο όλων των άπειρων ακολουθιών επί του αλφάβητου {0,1}. Εφαρμόζοντας την τεχνική της διαγωνιοποίησης, να δείξετε ότι το σύνολο *B* είναι υπεραριθήσιμο.**

**<u>Λύση</u>**

Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι το σύνολο B είναι αριθμήσιμο. Τότε, θα πρέπει να υπάρχει μονομορφική και επιμορφική συνάρτηση ανάμεσα στο B και το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Έστω $f$ μια τέτοια συνάρτηση. Θα δείξουμε ότι η $f$ δεν μπορεί να πληροί τον ορισμό μιας τέτοιας αντιστοιχίας. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι υπάρχει κάποια ακολουθία $x \in$ B η οποία δεν αντιστοιχείται σε κανένα ακέραιο μέσω της συνάρτησης $f$.

Για να βρούμε την $x$ μπορούμε απλά να την κατασκευάσουμε, επιλέγοντας το κάθε ψηφίο της έτσι ώστε η $x$ να διαφέρει από κάποια από τις ακολουθίες οι οποίες έχουν συνταιριαστεί με στοιχεία του $\mathbb{N}$. Στο τέλος αυτής της διαδικασίας, θα είμαστε βέβαιοι ότι ο $x$ διαφέρει από όλες τις ακολουθίες που έχουν συνταιριαστεί.

Για να κατασκευάσουμε την άπειρη ακολουθία *x* αρκεί να προσδιορίσουμε τα ψηφία της. Γράφουμε $x = x_1 x_2 x_3\ldots$ και επιλέγουμε τα $x_1$, $x_2$, $x_3$ ως εξής:

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{αν η ακολουθία } f(i) \text{ έχει στην } i\text{-οστή της θέση το } 1 \\ 1, & \text{αν η ακολουθία } f(i) \text{ έχει στην } i\text{-οστή της θέση το } 0 \end{cases}$$

Συνεπώς, η *x* διαφέρει από κάθε ακολουθία που έχει συνταιριαστεί με κάποιο ακέραιο. Συγκεκριμένα, διαφέρει από την ακολουθία που έχει συνταιριαστεί με τον ακέραιο *i* στην *i*-οστή θέση. Επομένως η συνάρτηση *f* δεν είναι επιμορφική και, κατά συνέπεια, το σύνολο Β είναι υπεραριθμήσιμο.