Σειρά Προβλημάτων 4 – Λύσεις

Άσκηση 1

(α) Να διατυπώσετε την τυπική περιγραφή μιας μηχανής Turing (αυθεντικός ορισμός) η οποία να διαγιγνώσκει τη γλώσσα

$$\{ w \mid w = (ab)^{2m} b^m (ba)^m,\ m \geq 0 \}$$

(β) Να διατυπώσετε την τυπική περιγραφή μιας μηχανής Turing (αυθεντικός ορισμός) η οποία, με δεδομένο εισόδου μια λέξη της μορφής $a^k bw$, $w \in \{a,b\}^*$, να εισάγει τον ειδικό χαρακτήρα # μετά από k χαρακτήρες της λέξης w και στη συνέχεια να διαγράφει το πρόθημα $a^k b$. Δηλαδή, με είσοδο μια λέξη της μορφής $a^k b w_1 \ldots w_n$ στο τέλος της εκτέλεσης της μηχανής να παραμείνει στην ταινία η λέξη $w_1 \ldots w_k \# w_{k+1} \ldots w_n$. Για παράδειγμα, με δεδομένο εισόδου τη λέξη aaabbaaaaabba στο τέλος της εκτέλεσης της μηχανής να παραμείνει στην ταινία η λέξη baa#aaabba. Σημειώστε ότι αν η λέξη εισόδου δεν έχει τη μορφή $a^k bw$, ή η λέξη w έχει μήκος μικρότερο από k, τότε η μηχανή σας θα πρέπει να απορρίπτει.

Και στις δύο πιο πάνω περιπτώσεις να παρουσιάσετε το αλφάβητο εισόδου και το αλφάβητο ταινίας της μηχανής σας, καθώς και το σύστημα μεταβάσεών της, γραφικά, και να εξηγήσετε σύντομα τη λειτουργία της.

Λύση

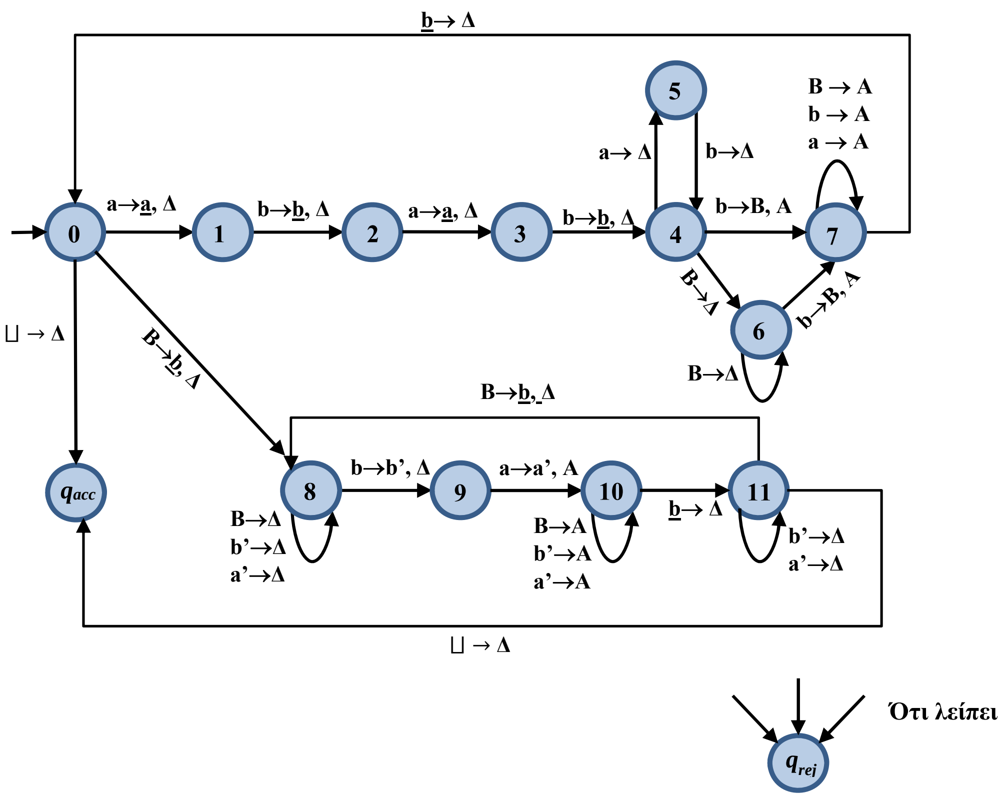
(α) Η ζητούμενη μηχανή Turing μπορεί να διατυπωθεί ως την επτάδα $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ όπου

1. Το σύνολο καταστάσεων Q αποτελείται από τις καταστάσεις που εμφανίζονται στο πιο κάτω σχήμα
2. Το αλφάβητο εισόδου Σ είναι το {a,b}
3. Το αλφάβητο ταινίας Γ είναι το $\Sigma \cup \{B, \underline{a}, \underline{b}, a', b', \sqcup\}$
4. Η *συνάρτηση μετάβασης* δ είναι όπως απεικονίζεται στο πιο κάτω σχήμα
5. $q_o = 0 \in Q$ είναι η *εναρκτήρια κατάσταση*
6. $q_{acc} \in Q$ είναι η *κατάσταση αποδοχής*
7. $q_{rej} \in Q$ είναι η *κατάσταση απόρριψης*

Περιγραφή μηχανής:

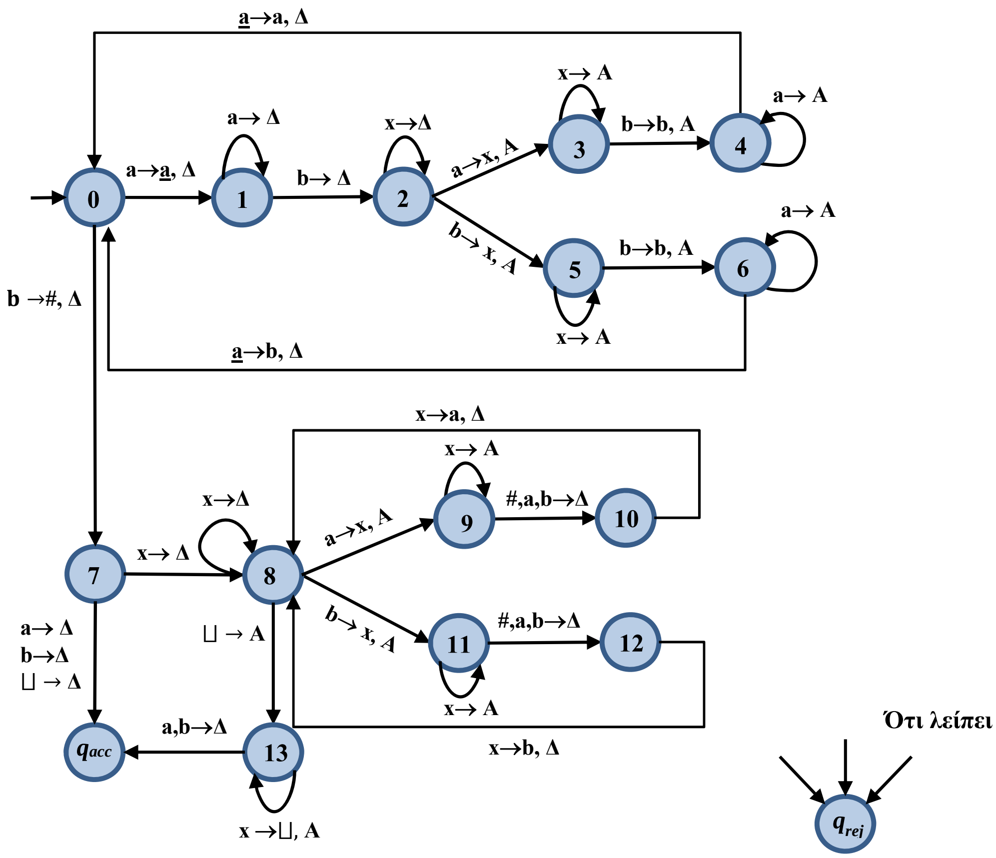
1. Κατ’ αρχάς, αν η λέξη είναι κενή, η μηχανή αποδέχεται τη λέξη.
2. Στη συνέχεια, σε πρώτη φάση, η μηχανή διαβάζει τη συμβολοσειρά abab και τη διαγράφει/σημειώνει υπογραμμίζοντας τα σχετικά σύμβολα).
3. Στη συνέχεια προχωρεί δεξιά προσπερνώντας τα επόμενα ab και στο πρώτο b που ακολουθεί (και δεν είναι διαγραμμένο) το διαγράφει μετατρέποντάς το σε B. Επιστρέφει αριστερά μέχρι να συναντήσει το πρώτο $\underline{b}$ κατά την κίνησή της (δηλαδή, το τελευταίο $\underline{b}$ διαβάζοντας τη λέξη από αριστερά προς δεξιά) και επαναλαμβάνει το Βήμα 2.

4. Αν τα ab έχουν εξαντληθεί, τότε η μηχανή προχωρεί στη δεύτερη φάση της λειτουργίας της, κατά την οποία στόχος της είναι να διαγράψει όσα ba στο τρίτο σκέλος της λέξης όσα και τα b στο μεσαίο σκέλος της λέξης.
5. Κινείται στο πρώτο B και το μετατρέπει σε b̲. Προσπερνά τα B και a', b', που ακολουθούν, μέχρι να βρει μια ακολουθία ba την οποία και διαγράφει μετατρέποντάς την σε b'a'. Επιστρέφει πίσω στο πρώτο (από αριστερά) B και επαναλαμβάνει το βήμα.
6. Αν τα B εξαντληθούν ελέγχει το υπόλοιπο της ταινίας. Αν αυτό περιέχει μόνο a' και b' τότε η μηχανή αποδέχεται. Διαφορετικά απορρίπτει.



(β) Η ζητούμενη μηχανή Turing μπορεί να διατυπωθεί ως την επτάδα $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ όπου

1. Το σύνολο καταστάσεων Q αποτελείται από τις καταστάσεις που εμφανίζονται στο πιο κάτω σχήμα
2. Το αλφάβητο εισόδου Σ είναι το {1}
3. Το αλφάβητο ταινίας Γ είναι το $\Sigma \cup \{\underline{a}, x, \sqcup\}$
4. Η *συνάρτηση μετάβασης* δ είναι όπως απεικονίζεται στο πιο κάτω σχήμα
5. $q_o = 0 \in Q$ είναι η *εναρκτήρια κατάσταση*
6. $q_{acc} \in Q$ είναι η *κατάσταση αποδοχής*
7. $q_{rej} \in Q$ είναι η *κατάσταση απόρριψης*



Περιγραφή μηχανής:

1. Ξεκινώντας η μηχανή υπογραμμίζει το πρώτο a, αν υπάρχει. Εντοπίζει το πρώτο σύμβολο μετά από την υποσυμβολοσειρά $a^k b$, και αφού γράψει στη θέση του x, το αντιγράφει στην πρώτη θέση.
2. Επιστρέφει στην αρχή της ταινίας και, αν υπάρχει επόμενο a το οποίο δεν έχει τύχει της συγκεκριμένης επεξεργασίας, εντοπίζει το επόμενο σύμβολο (που βρίσκεται μετά από τα x που έχουν καταγραφεί σε προηγούμενα βήματα) και το μεταφέρει στο αρχικό τμήμα της ταινίας.
3. Όταν εξαντληθούν τα αρχικά a, η ταινία θα περιέχει τη λέξη $w_1 \ldots w_k b x^k w_{k+1} \ldots w_n$. Επομένως, η κεφαλή μεταφέρεται πριν από την ομάδα από τα x και μετατρέπει το b σε #.
4. Στη συνέχεια, η μηχανή εντοπίζει το πρώτο σύμβολο μετά από τα x, και αφού γράψει στη θέση του x, το αντιγράφει στη θέση του πρώτου x.
5. Επαναλαμβάνει το Βήμα 4, μέχρι να εξαντληθούν τα σύμβολα μετά από τα x.

<u>Άσκηση 2</u>

Να παρουσιάσετε λεπτομερείς περιγραφές (i) μιας απλής μηχανής Turing και (ii) μιας πολυταινιακής μηχανής Turing οι οποίες να διαγιγνώσκουν τη γλώσσα

$$\{\ www \mid w \in \{0,1\}^*\ \}$$

Να συγκρίνετε τις δύο μηχανές ως προς τη χρονική τους πολυπλοκότητα.

[Υπόδειξη: Εκτός από την ταινία στην οποία θα είναι αποθηκευμένη η είσοδος, χρησιμοποιήστε ακόμα τρεις ταινίες για διαχωρισμό της λέξης εισόδου σε τρία ίσα τμήματα (ή να προσδιορίζει ότι αυτό δεν είναι δυνατό).]

<u>Λύση</u>

Η πιο κάτω μηχανή Turing λειτουργεί ως εξής: Τοποθετεί ένα σημάδι στα τρία πρώτα στοιχεία της ταινίας. Ελέγχει αν αυτά μοιράζουν τη λέξη εισόδου σε τρία ίσα μέρη. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε συγκρίνοντας το μήκος της λέξης που μεσολαβεί μεταξύ του δεύτερο και του τρίτου σημαδεμένου συμβόλου με το μήκος της λέξης που έπεται του τρίτου συμβόλου. Αν όχι, τότε μετακινεί το δεύτερο και το τρίτο σημάδι μία θέση προς τα δεξιά και δύο θέσεις προς τα δεξιά, αντίστοιχα. Επαναλαμβάνει την ίδια διαδικασία μέχρι είτε να μοιραστεί η λέξη σε τρία ίσα σκέλη, είτε να διαπιστωθεί ότι αυτό είναι αδύνατο οπόταν η μηχανή θα απορρίψει τη λέξη.

Σε περίπτωση που η λέξη διασπαστεί σε τρία ίσα τμήματα, με διαδοχικές διασχίσεις της λέξης εισόδου αυτά συγκρίνονται μεταξύ τους και η μηχανή αποδέχεται εάν αυτά συμπίπτουν.

1_Tape = ‘ Με δεδομένο εισόδου μια λέξη x

1. Αν η ταινία είναι κενή τότε αποδέξου. Αν περιέχει 1 ή 2 στοιχεία, τότε απόρριψε.
2. Διαφορετικά, σημάδεψε τις πρώτες τρεις θέσεις της ταινίας.
3. Επίστρεψε στο δεύτερο σημαδεμένο σύμβολο και μέχρι να εξαντληθεί το τμήμα της λέξης μέχρι το τρίτο σημαδεμένο σύμβολο:
    a. Διάβασε το επόμενο σύμβολο και σημάδεψέ το (με ένα διαφορετικό σημάδι από αυτό που χρησιμοποιήθηκε στο Βήμα 2).
    b. Μετακινήσου στο επόμενο σύμβολο στο τρίτο τμήμα της ταινίας. Αν δεν υπάρχει τέτοιο σύμβολο απόρριψε. Διαφορετικά σημάδεψέ το και επανάλαβε το Βήμα 3.
    c. Αν απομένουν μη σημαδεμένα σύμβολα στο τρίτο τμήμα της λέξης, τότε επίστρεψε στο δεύτερο σημαδεμένο σύμβολο της ταινίας και μετακίνησε το σημάδι μια θέση στα δεξιά και στη συνέχεια μετακίνησε το τρίτο σημάδι δύο θέσεις δεξιά. Επανάλαβε το Βήμα 3.
4. Μέχρι να φτάσεις στο τελευταίο στοιχείο του πρώτου τμήματος της ταινίας:
    a. Διάβασε το στοιχείο της θέσης αυτής, σημάδεψέ το, και σύγκρινέ το με το αντίστοιχο στοιχείο στο δεύτερο τμήμα της ταινίας το οποίο σημάδεψε επίσης. Αν είναι διαφορετικά απόρριψε.
    b. Διαφορετικά σύγκρινέ το με το αντίστοιχο στοιχείο στο τρίτο τμήμα της ταινίας, το οποίο σημάδεψε επίσης. Αν είναι τα ίδια επίστρεψε στην αρχή της ταινίας και επανάλαβε το Βήμα 5, διαφορετικά απόρριψε.’

Η TM 1_Tape θα χρειαστεί O(1) χρόνο για τα Βήμα 1-2, $O(n^2)$ χρόνο για το Βήμα 3, ενώ για το Βήμα 4 θα κάνει (στη χείριστη περίπτωση) n επαναλήψεις κάθε μια από τις οποίες θα χρειαστεί χρόνο $O(n^3)$. Επομένως, η χρονική πολυπλοκότητας της 1_Tape ανήκει στην τάξη $O(n^3)$.

(ii) Η πιο κάτω τριταινιακή μηχανή Turing λειτουργεί παρόμοια με την 1_Tape. Έχοντας όμως στη διάθεσή της τρεις ταινίες, εντοπίζει τα τρία τμήματα της ταινίας ως εξής: Αντιγράφει το δεύτερο στοιχείο της ταινίας στη δεύτερη ταινία, το τρίτο στοιχείο της ταινίας στην τρίτη ταινία, το πέμπτο στοιχείο στη δεύτερη ταινία, το έκτο στοιχείο στην τρίτη ταινία, και ούτω καθεξής. Με αυτό τον τρόπο γνωρίζει το μήκος του ενός τρίτου της ταινίας. Για να χωρίσει στη συνέχεια τα τμήματα στα τρία (συνεχόμενα) τμήματά της, διαβάζει τα πρώτα n/3 στοιχεία της λέξης (έστω n το μήκος της λέξης). Αυτό το πετυχαίνει αφού ταυτόχρονα προχωρεί στη δεύτερη ταινία μέχρι να εξαντληθούν τα σύμβολά της (τα οποία είναι n/3 σε πλήθος). Στη συνέχεια διαβάζει τα επόμενα n/3 σύμβολα, και τα τοποθετεί στη δεύτερη ταινία. Τέλος τα τελευταία n/3 στοιχεία τα τοποθετεί στην τρίτη ταινία.

3_Tape = ‘ Με δεδομένο εισόδου μια λέξη x:

1. Αν η x είναι κενή τότε αποδέξου. Αν περιέχει 1 ή 2 στοιχεία, τότε απόρριψε.
2. Διαφορετικά, διάσχισε την ταινία και αντίγραψε από κάθε τριάδα στοιχείων της λέξης το δεύτερο στοιχείο στη δεύτερη ταινία και το τρίτο στοιχείο στην τρίτη ταινία. Αν περισσέψει κάποιο στοιχείο τότε απόρριψε τη λέξη.
3. Επίστρεψε στην αρχή των τριών ταινιών.
4. Διάσχισε την πρώτη ταινία και:
   a. Προσπέρασε τόσα στοιχεία της πρώτης ταινίας όσα και τα στοιχεία της δεύτερης ταινίας. Επίστρεψε στην αρχή της δεύτερης ταινίας.
   b. Αντίγραψε στη δεύτερη ταινία τόσα στοιχεία της πρώτης ταινίας όσα και τα στοιχεία της τρίτης ταινίας.
   c. Αντίγραψε στην τρίτη ταινία τα εναπομείναντα στοιχεία της πρώτης ταινίας. Επίστρεψε στην αρχή και των τριών ταινιών.
5. Ξεκίνα μια διάσχιση των ταινιών συγκρίνοντας τα αντίστοιχα στοιχεία τους όπου
   a. Αν τα στοιχεία των τριών ταινιών συμπίπτουν, τότε προχώρα στο επόμενο στοιχείο, διαφορετικά, απόρριψε.
   b. Όταν τα στοιχεία της δεύτερης και της τρίτης ταινίας εξαντληθούν, αποδέξου την είσοδο.’

Η ΤΜ 3_Tape θα χρειαστεί O(n) χρόνο για κάθε ένα από τα Βήματα 1-5, επομένως, η χρονική πολυπλοκότητας της 3_Tape ανήκει στην τάξη $O(n^2)$.

<u>Άσκηση 3</u>

Δώστε αφ’ υψηλού περιγραφές μηχανών Turing που να διαγιγνώσκουν τις ακόλουθες γλώσσες. Σε περίπτωση που θα χρησιμοποιήσετε μηχανές από τις διαλέξεις να τις περιγράψετε.

(α) { ⟨M,k⟩ | το M είναι μια μηχανή Turing επί του αλφάβητου {0,1} η οποία αποδέχεται κάποια λέξη μέσα στις k πρώτες κινήσεις της }

Η διάγνωση του προβλήματος βασίζεται στην εξής ιδέα: Για να αποφασίσουμε κατά πόσο η μηχανή M μπορεί να αποδεχθεί μια λέξη μέσα στις k πρώτες κινήσεις της, μπορούμε να τρέξουμε την M σε όλες τις λέξεις και μόλις βρούμε την πρώτη λέξη για την οποία η μηχανή αποδέχεται σε k το πολύ κινήσεις να τερματίσουμε και να αποδεχτούμε. Το πρόβλημα με αυτή την προσέγγιση είναι ότι το σύνολο των δυνατών λέξεων δυνατόν να είναι μη πεπερασμένο. Από τη στιγμή όμως που μας ενδιαφέρουν μόνο οι k πρώτες κινήσεις είναι αρκετό να δοκιμάσουμε τις λέξεις που έχουν k το πολύ σύμβολα. Το πλήθος αυτών των λέξεων είναι x^k όπου x το μέγεθος του αλφάβητου της μηχανής μας. Η ζητούμενη μηχανή έχει ως εξής:

G = ‘ Για είσοδο ⟨M⟩ όπου το M είναι μια TM με αλφάβητο Σ:

1. Δημιουργούμε το σύνολο A όλων των λέξεων του αλφάβητου Σ που έχουν μήκος το πολύ k.
2. Για κάθε λέξη $w \in A$
   i. Εκτέλεσε την w στην M μετρώντας τα βήματα που εκτελούνται.
   ii. Αν στα πρώτα k βήματα η μηχανή αποδεχθεί τότε αποδέξου.
   iii. Διαφορετικά προχώρησε στην επόμενη λέξη.
3. Αν εξαντλήσουμε τις λέξεις του συνόλου A τότε απορρίπτουμε.’

(β) { ⟨R,G⟩ | το R είναι μια κανονική έκφραση και το G μια ασυμφραστική γραμματική που δεν αποδέχονται καμιά κοινή λέξη }

S = ‘ Για είσοδο ⟨R,G⟩ , όπου το R είναι μια κανονική έκφραση και το G ένα PDA:

1. Μετατρέπουμε την κανονική έκφραση R στο ισοδύναμο DFA D.
2. Δημιουργούμε ένα PDA, έστω P, το οποίο αποδέχεται τη γλώσσα $L(G) \cap L(D)$. Συγκεκριμένα, αν $G = \langle Q_1, \Sigma, \Gamma, \delta_1, q_1, F_1 \rangle$ και $D = \langle Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2 \rangle$ κατασκευάζουμε το $P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$ ως εξής:
   i. Καταστάσεις του P, είναι οι καταστάσεις (x,y) όπου $x \in Q_1$ και $y \in Q_2$
   ii. $q_0 = (q_1, q_2)$
   iii. Τελικές καταστάσεις του P, είναι οι καταστάσεις (x,y) όπου η x είναι τελική κατάσταση του G και η y είναι τελική κατάσταση του D.
   iv. Στο αυτόματο P η μετάβαση $((x',y'),b') \in \delta((x,y),a,b)$ είναι εφικτή εφόσον η μετάβαση $(x',b') \in \delta_1(x,a,b)$ είναι εφικτή στο P και η μετάβαση $y' = \delta_2(y,a)$ είναι εφικτή στο αυτόματο D.
3. Μετατρέπουμε το P σε μια ισοδύναμη ασυμφραστική γραμματική, έστω H.
4. Εφαρμόζουμε την TM R, διαφάνεια 8-18 (ΚΕΝΟΤΗΤΑ_{CFG}), στη γραμματική H. Αν η R αποδεχτεί απορρίπτουμε, διαφορετικά αποδεχόμαστε.’

(γ) { ⟨D⟩ | το D είναι ένα DFA επί του αλφάβητου {0,1} με k καταστάσεις το οποίο αποδέχεται κάποια λέξη με k^2 εμφανίσεις του συμβόλου 0 }

Παρατηρούμε ότι, για να αποδέχεται το αυτόματο κάποια λέξη με k^2 εμφανίσεις του συμβόλου 0, και αφού το μήκος μιας τέτοιας λέξης προφανώς ξεπερνά τον αριθμό των καταστάσεων του αυτομάτου, θα πρέπει το αυτόματο να περιέχει κάποιο κύκλο που περιέχει το σύμβολο 0, ο οποίος είναι προσβάσιμος από την αρχική κατάσταση και ο οποίος οδηγεί στην τελική κατάσταση.

Επομένως το πρόβλημα μπορεί να τύχει διάγνωσης με έλεγχο ύπαρξης ενός τέτοιου κύκλου.

Άσκηση 4

Ορίζουμε ως 2-3TM μια μηχανή Turing $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ η οποία ορίζεται με παρόμοιο τρόπο με μια συνήθη TM με τη διαφορά ότι σε κάθε κίνηση Δ η κεφαλή της ταινίας μετακινείται κατά δύο θέσεις προς τα δεξιά, και σε κάθε κίνηση Α η κεφαλή της ταινίας μετακινείται κατά τρεις θέσεις προς τα αριστερά.

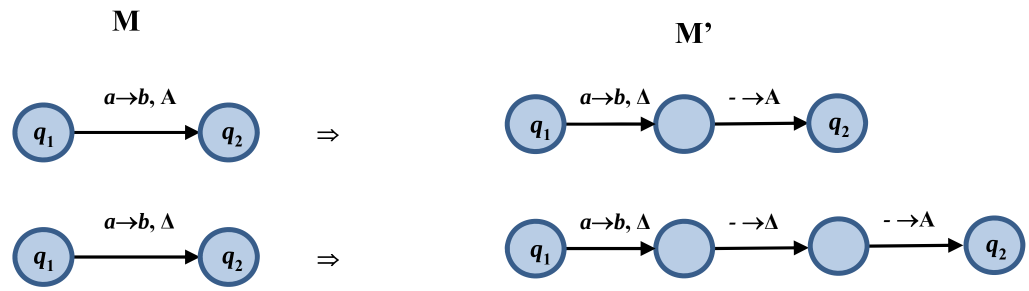
(α) Να δείξετε ότι αυτή η παραλλαγή των TM είναι ισοδύναμη με την αυθεντική TM. (Να δώσετε σαφείς εξηγήσεις της ισοδυναμίας παρουσιάζοντας τις καταστάσεις/μεταβάσεις της TM που προσομοιώνει την 2-3TM.)

(β) Θεωρήστε τη γενίκευση των 2-3TM σε k-mTM, όπου το k αντιστοιχεί στον αριθμό θέσεων δεξιά κατά τις οποίες μετακινείται η κεφαλή της ταινίας σε κάθε Δ κίνησή της, και m ο αριθμός θέσεων προς τα αριστερά κατά τις οποίες κινείται η κεφαλή της TM σε κάθε Α κίνησή της. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα k και m για να είναι ισοδύναμη μια k-mTM με την αυθεντική μηχανή Turing; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε 2-3TM μηχανή Turing μπορεί να τύχει προσομοίωσης από μια αυθεντική μηχανή Turing – απλά η ισοδύναμη μηχανή θα προσομοιώνει τις κινήσεις της 2-3TM μέσω μιας ακολουθίας από κινήσεις.

Για την αντίθετη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι Μ είναι μια μηχανή Turing . Θα δείξουμε ότι η λειτουργία της Μ μπορεί να τύχει προσομοίωσης από μια 2-3ΤΜ, έστω Μ'.



Επομένως, για προσομοίωση μετακίνησης μίας θέσης προς τα αριστερά, η 2-3ΤΜ θα εκτελέσει πρώτα μια κίνηση προς τα δεξιά (μετακίνηση δύο θέσεων δεξιά) και στη συνέχεια μια κίνηση προς τα αριστερά (μετακίνηση τριών θέσεων αριστερά). Παρατηρούμε ότι αν η κεφαλή της ταινίας βρίσκεται στην πρώτη θέση, τότε το αποτέλεσμα αυτής της προσομοίωσης θα είναι η κεφαλή να παραμείνει στην πρώτη θέση (που είναι και το ζητούμενο).

Από την άλλη, για προσομοίωση μετακίνησης μίας θέσης προς τα δεξιά, η 2-3ΤΜ θα εκτελέσει πρώτα δύο κινήσεις προς τα δεξιά (μετακίνηση τεσσάρων θέσεων δεξιά) και στη συνέχεια μια κίνηση αριστερά (μετακίνηση τριών θέσεων αριστερά).

(β) Παρατηρούμε ότι για να είναι ισοδύναμη μια k-mTM με την αυθεντική μηχανή Turing, θα πρέπει να είναι δυνατόν να προσομοιώσουμε με μια ακολουθία κινήσεων της μηχανής αυτής τη μετακίνηση της αυθεντικής ΤΜ κατά μία θέση προς τα δεξιά και κατά μία θέση στα αριστερά. Θα πρέπει δηλαδή μια επανάληψη κάποιων α κινήσεων δεξιά και κάποιων β κινήσεων αριστερά να έχει ως αποτέλεσμα την μετακίνηση μίας θέσης δεξιά. Τυπικά, πρέπει να υπάρχουν ακέραιοι α και β τέτοιοι ώστε

αk – βm = 1 (κίνηση δεξιά) και αk – βm = -1 (ή βm – αk = 1 - κίνηση αριστερά)

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι για ακέραιους k και m:

Υπάρχουν α, β $\in\mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε αk + βm = 1

αν και μόνο αν

οι k και m είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους, δηλαδή, δεν έχουν κοινούς παράγοντες.

Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μια k-mTM είναι ισοδύναμη με μια αυθεντική ΤΜ αν και μόνο αν οι τιμές k και m είναι ακέραιοι αριθμοί σχετικά πρώτοι μεταξύ τους.

Άσκηση 5

Θεωρήστε το αλφάβητο Σ και τρεις διαγνώσιμες γλώσσες L_1, L_2 και L_3 επί του αλφάβητου Σ.

(α) Να αποδείξετε ότι η γλώσσα $L_1 L_2 – L_3$ είναι επίσης μια διαγνώσιμη γλώσσα.

(β) Ισχύει το ίδιο για την κλάση των αναγνωρίσιμων γλωσσών; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

(α) Έστω διαγνώσιμες γλώσσες L_1, L_2 και L_3 επί του αλφάβητου Σ. Ας υποθέσουμε ότι M_1, M_2 και M_3 αποτελούν μηχανές Turing που τις διαγιγνώσκουν. Για να δείξουμε ότι η γλώσσα L_1 L_2 – L_3 είναι επίσης μια διαγνώσιμη γλώσσα πρέπει να κατασκευάσουμε μια μηχανή Turing M που τη διαγιγνώσκει. Ακολουθεί μια τέτοια μηχανή:

M' = 'Για λέξη w:

1. Τρέξε τη λέξη w στη μηχανή M_3. Αν αυτή απορρίψει προχώρησε στο Βήμα 2. Διαφορετικά, απόρριψε.
2. Δημιούργησε όλα τα δυνατά σπασίματα της w σε δύο υπολέξεις uv, τέτοιες ώστε w = uv.
3. Για κάθε σπάσιμο w = uv.
   a. Τρέξε τη λέξη u στη μηχανή M_1. Αν αυτή απορρίψει προχώρησε στο επόμενο σπάσιμο. Διαφορετικά...
   b. Τρέξε τη λέξη v στην μηχανή M_2. Αν αυτή απορρίψει προχώρησε στο επόμενο σπάσιμο. Διαφορετικά, αποδέξου
4. Αν τα σπασίματα εξαντληθούν τότε απόρριψε τη λέξη'.

Ορθότητα/Τερματισμός: Μια λέξη w ανήκει στη γλώσσα L_1L_2 – L_3 αν (i) αποτελεί τη συναρμογή δύο λέξεων που ανήκουν στις γλώσσες L_1 και L_2 και (ii) η λέξη w δεν ανήκει στη γλώσσα L_3. Η πιο πάνω μηχανή ελέγχει το (i) στο Βήμα 3 τρέχοντας τις μηχανές M_1 και M_2, και το (ii) στο Βήμα 1 τρέχοντας τη μηχανή M_3. Αποδεχεται ακριβώς τις λέξεις που περνούν τους δύο αυτούς ελέγχους.

Αφού οι M_1, M_2 και M_3 αποτελούν διαγνώστες, και η μηχανή M που ορίσαμε αποτελεί διαγνώστη.

(β) Ισχύει το ίδιο για την κλάση των αναγνωρίσιμων γλωσσών; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Αναφορικά με το δεύτερο ερώτημα, μπορούμε να δείξουμε το αποτέλεσμα και στα πλαίσια των αναγνωρίσιμων γλωσσών. Η μηχανή όμως που ορίσαμε πιο πάνω δεν είναι κατάλληλη για τον στόχο αυτό διότι από τη στιγμή που οι L_1, L_2 και L_3 είναι αναγνωρίσιμες γλώσσες η TM M είναι δυνατόν να εγκλωβιστεί σε μια από τις λέξεις που τρέχουν οι μηχανές M_1, M_2 και M_3 στο Βήμα 3, γεγονός που δυνατόν να μας αποτρέψει από το να εντοπίσουμε το κατάλληλο σπάσιμο της w ως συναρμογή λέξεων των γλωσσών L_1 και L_2 και επομένως να μας αποτρέψει από το να αναγνωρίσουμε ότι μια λέξη w ανήκει στο L_1L_2 – L_3.

Για να αποφύγουμε το πρόβλημα θα πρέπει η ζητούμενη μηχανή να λειτουργήσει μη ντετερμινιστικα ως εξής:

N' = 'Για λέξη w:

1. Τρέξε τη λέξη w στη μηχανή M_3. Αν αυτή απορρίψει προχώρησε στο Βήμα 2. Διαφορετικά, απόρριψε.
2. Επίλεξε μη ντετερμινιστικά κάποιο σπάσιμο της w σε δύο υπολέξεις uv, τέτοιες ώστε w = uv.
   a. Τρέξε τη λέξη u στη μηχανή M_1. Αν αυτή απορρίψει τότε απόρριψε. Διαφορετικά...
   b. Τρέξε τη λέξη v στην μηχανή M_2. Αν αυτή αποδεχθεί αποδέξου διαφορετικά απόρριψε.'

Παρατηρούμε ότι αν η λέξη w ανήκει στο σύνολο L_1L_2 – L_3 τότε η μηχανή N' θα αποδεχθεί και επομένως αναγνωρίζει τη γλώσσα.