Ασκήσεις Επανάληψης

<u>Άσκηση 1 (Τελική Εξέταση 5/2015)</u>
Να δείξετε ότι η πιο κάτω γλώσσα *δεν* είναι διαγνώσιμη.

$$\{ \langle M \rangle \mid L(M) \supseteq \{\text{ΘΕΩΡΙΑ, ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ}\} \text{ και } |L(M)| \geq 3\}$$

(Για την αναγωγή μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα A_{TM}.)

<u>Λύση:</u>

Θέλουμε να δείξουμε ότι η γλώσσα

$$\text{ΘΥ3} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \supseteq \{\text{ΘΕΩΡΙΑ, ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ}\} \text{ και } |L(M)| \geq 3\}$$

είναι μη διαγνώσιμη. Για να το δείξουμε θα αναγάγουμε μια γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα, την A_{TM}, στην υπό μελέτη γλώσσα ΘΥ3.

Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η γλώσσα ΘΥ3 είναι διαγνώσιμη και η TM R είναι σε θέση να τη διαγνώσει. Με βάση τον διαγνώστη R θα κατασκευάσουμε ένα διαγνώστη S για το πρόβλημα A_{TM}. Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η ΘΥ3 είναι μια μη διαγνώσιμη γλώσσα.

Ο διαγνώστης S έχει ως εξής:

S = "Με είσοδο $\langle M,w \rangle$

1. Φτιάξε τη TM M' η οποία με είσοδο x:
   (α) Αν x = ΘΕΩΡΙΑ, η M' αποδέχεται
   (β) Αν x = ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ, η M' αποδέχεται
   (γ) Διαφορετικά, η M' τρέχει το M με είσοδο w. Αν η M αποδεχτεί το w τότε και η M'αποδέχεται διαφορετικά απορρίπτει.
2. Τρέξε την R με είσοδο $\langle M' \rangle$.
3. Αν η R αποδεχτεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ.
4. Αν η R απορρίψει ΑΠΟΡΡΙΨΕ.

Εξετάζοντας την πιο πάνω μηχανή παρατηρούμε ότι η μηχανή M' αποδέχεται τις λέξεις ΘΕΩΡΙΑ και ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ και τουλάχιστον ακόμα μια λέξη, αν και μόνο αν η μηχανή M αποδέχεται τη λέξη w. Ως εκ τούτου, με είσοδο τη μηχανή M', ο διαγνώστης R θα αποδεχτεί αν και μόνο αν η μηχανή M' αποδέχεται τις λέξεις ΘΕΩΡΙΑ, ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ και τουλάχιστον ακόμα μια λέξη ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν η μηχανή M αποδέχεται τη λέξη w.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

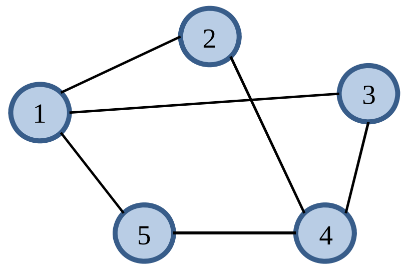
Άσκηση 2 (Τελική Εξέταση 5/2012)

Θεωρήστε την πιο κάτω γλώσσα:

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ_ΣΥΝΟΛΟ =

$\{ \langle G,k\rangle$ | ο G = (V,E) είναι ένα γράφος ο οποίος διαθέτει ένα σύνολο κόμβων $S \subseteq V$ μεγέθους k τέτοιο ώστε για κάθε $u, v \in S$, $(u,v) \notin E$ }

Για παράδειγμα, $\langle G,3\rangle$, όπου G ο πιο κάτω γράφος, ανήκει στο ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ_ΣΥΝΟΛΟ αφού διαθέτει το σύνολο με τρεις κόμβους {2,3,5} όπου οι κόμβοι 2, 3 και 5 δεν συνδέονται μεταξύ τους μέσω ακμών.



(α) Να δείξετε ότι το πρόβλημα αυτό ανήκει στην κλάση NP.

(β) Να δείξετε ότι το πρόβλημα είναι NP-πλήρες.

Λύση

(α) Ακολουθεί αλγόριθμος Ν που αποτελεί μη ντετερμινιστικό διαγνώστη πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα.

Ν := "Για είσοδο $\langle G, k\rangle$ όπου G ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα και k ένας ακέραιος:

1. Επιλέγουμε μη ντετερμινιστικά ένα σύνολο *k* κόμβων του G, έστω C
2. Ελέγχουμε αν κάποιο ζεύγος κορυφών του C συνδέεται μέσω ακμή στον γράφο G.
3. Αν υπάρχει κάποιο ζεύγος κορυφών που συνδέεται μέσω ακμής απορρίπτουμε, διαφορετικά, αποδεχόμαστε."

Ο χρόνος εκτέλεσης του Ν είναι πολυωνυμικός ως προς το μέγεθος του γράφου, επομένως ο Ν αποτελεί μη ντετερμινιστικό διαγνώστη πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα.

Συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP.

(β) Για να δείξουμε ότι το πρόβλημα είναι NP πλήρες αρκεί να δείξουμε ότι ένα γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα μπορεί να αναχθεί σε αυτό. Η αναγωγή θα γίνει από το πρόβλημα ΚΛΙΚΑ. Συγκεκριμένα, **θα δείξουμε ότι αν υπάρχει πολυωνυμική λύση για το πρόβλημα ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ_ΣΥΝΟΛΟ τότε υπάρχει πολυωνυμική λύση και για το πρόβλημα ΚΛΙΚΑ.**

Έστω ένας γράφος G = (V,E) και παράμετρος k. Θέλουμε να αποφασίσουμε κατά πόσο υπάρχει k-κλίκα στον γράφο. Κατασκευάζουμε τον γράφο G' ως τον γράφο με κορυφές τις κορυφές του G και ακμή ανάμεσα σε δύο κορυφές αν και μόνο οι δύο κορυφές δεν συνδέονται στον γράφο G. Δηλαδή, G' = (V,E') όπου

$E' = \{(u,v) \mid (u,v) \notin E\}$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει πολυωνυμική λύση για το πρόβλημα ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ_ΣΥΝΟΛΟ. Τρέχουμε τον σχετικό αλγόριθμο στον γράφο G'. Αν ο αλγόριθμος αποδεχτεί τότε απαντούμε ότι ο αρχικός μας γράφος περιέχει k-κλίκα, διαφορετικά, αν απορρίψει, τότε απαντούμε ότι ο γράφος δεν περιέχει k-κλίκα.

Ορθότητα: Παρατηρούμε τα εξής:

Ο γράφος G' περιέχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k

αν και μόνο αν

υπάρχει σύνολο $S=\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ τέτοιο ώστε για κάθε v_i , $v_j \in S$, $(v_i,v_j) \notin E'$

αν και μόνο αν

υπάρχει σύνολο $S=\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ τέτοιο ώστε για κάθε v_i , $v_j \in S$, $(v_i,v_j) \in E$ (από τον ορισμό του E')

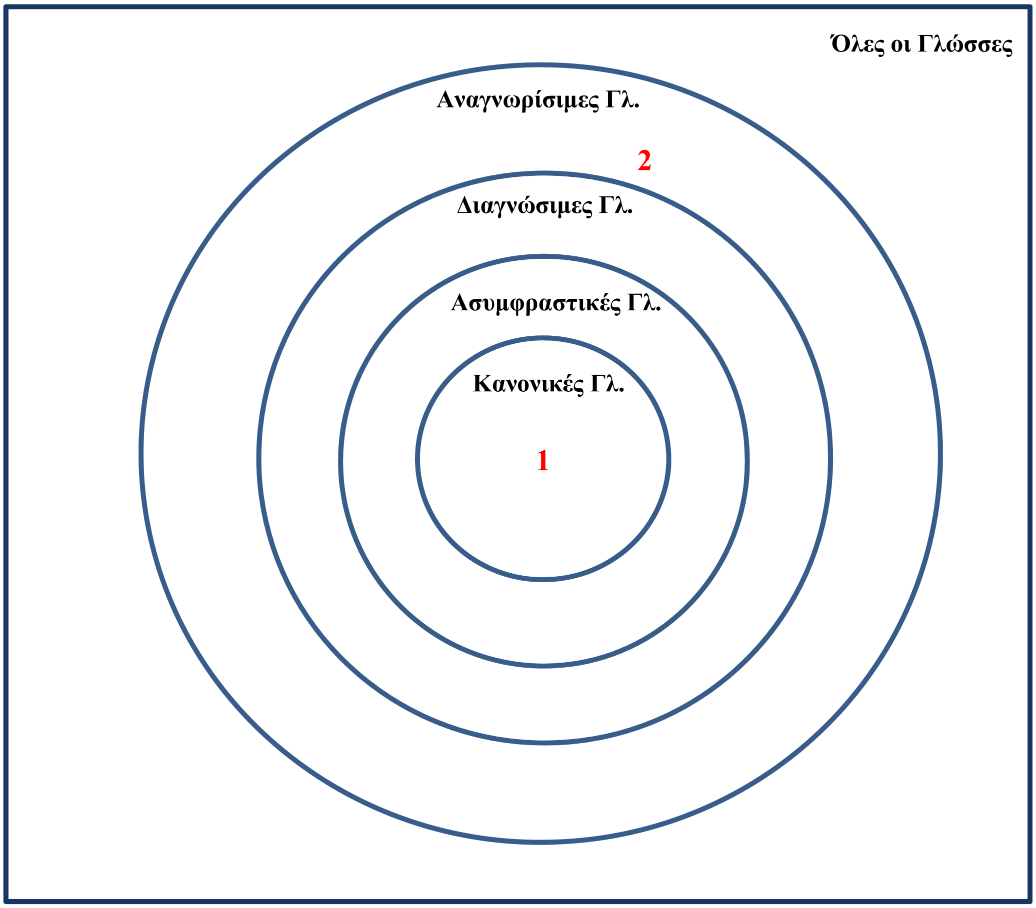
αν και μόνο αν

ο γράφος G περιέχει k-κλίκα.

Συμπέρασμα: Αν το πρόβλημα ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ_ΣΥΝΟΛΟ επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο τότε και το πρόβλημα ΚΛΙΚΑ επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Επομένως, αφού το πρόβλημα της ΚΛΙΚΑΣ είναι NP-πλήρες και το πρόβλημα ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ_ΣΥΝΟΛΟ είναι NP-πλήρες.

Άσκηση 3 (Τελική Εξέταση 5/2018)

Πιο κάτω υπάρχει ένα σχεδιάγραμμα που τοποθετεί τις κλάσεις των κανονικών, ασυμφραστικών, διαγνώσιμων και αναγνωρίσιμων γλωσσών μέσα στο σύνολο όλων των γλωσσών. Ακολουθούν 12 αριθμημένες γλώσσες. Να γράψετε τον αριθμό κάθε γλώσσας στην κλάση που ανήκει. Σαν παράδειγμα έχουν ήδη τοποθετηθεί στο διάγραμμα οι αριθμοί των δύο πρώτων γλωσσών: η γλώσσα με αριθμό **1** είναι κανονική ενώ η γλώσσα με αριθμό **2** είναι αναγνωρίσιμη (αλλά δεν είναι ούτε διαγνώσιμη, ούτε ασυμφραστική, ούτε κανονική).



1. Σ^*
2. A_{TM} (Το πρόβλημα της Αποδοχής σε Μηχανές Turing)
3. $\{ a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0$ και $i = j$ ή $i = k$ ή $j = k \}$
4. $\{ \langle D \rangle \mid$ το D είναι ένα DFA το οποίο αποδέχεται όλες τις λέξεις στο $\Sigma^* \}$
5. $\{ w \in \{a,b\}^* \mid$ η w περιέχει διπλάσιο αριθμό a από $b \}$
6. k-ΚΛΙΚΑ (Το πρόβλημα εύρεσης k-κλίκας σε ένα γράφο)
7. $\{ \langle M,k \rangle \mid$ η M είναι μια TM η οποία αποδέχεται τουλάχιστον μια λέξη μήκους $k \}$
8. $\{ a^i b^j a^j b^i \mid i, j > 0 \}$
9. $\{ \langle M,w \rangle \mid$ η M είναι μια TM η οποία εγκλωβίζεται στη λέξη $w \}$

10. $\{ ww^R a^{|w|} \mid w \in \{a,b\}^* \}$

11. $\{ \langle G_1, G_2 \rangle \mid$ οι G_1 και G_2 είναι δύο CFG που παράγουν μια κοινή λέξη μήκους 100 $\}$

12. $\{ a^k baba^n \mid k = n \bmod 2 \}$

Λύση